Hermite-Interpolation

- Gegeben sind Sützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_m$ sowie Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_m)$ und Werte der Ableitungen $f', \ldots, f^{(\mu_i)}$ in den Stützstellen, wobei $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{N}$ verschieden sein können.

Stützstellen	x_0	x_1	$\ldots$	x_m
Funktionswerte	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_m)$
Funktionswerte	$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$\ldots$	$f'(x_m)$
der Ableitungen	$f''(x_0)$	$f''(x_1)$	$\ldots$	$f''(x_m)$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$f^{(\mu_0)}(x_1)$	$f^{(\mu_1)}(x_1)$	$\ldots$	$f^{(\mu_m)}(x_m)$

(1)

Beispiel für $m = 3$, $\mu_0 = 3$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ und $\mu_3 = 2$:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	2	-1	0	2
$f'(x_i)$	4	$-$	1	4
$f''(x_i)$	8	$-$	$-$	8
$f''(x_i)$	12	$-$	$-$	$-$

- Gesucht ist ein Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ vom Grad $n := -1 + \sum_{j=0}^{m}(\mu_j + 1)$ zu den $n + 1 = \sum_{j=0}^{n}(\mu_j + 1)$ Interpolatonsvorgaben. Das Polynom p heißt auch Hermite-Interpolationspolynom.
- Satz: Zu jeder Hermite-Interpolationsvorgabe gemäß (1) gibt es genau ein Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_n$.
- Berechnungsverfahren 1: Es gilt

$$p(x) \;=\; \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\mu_j} f^{(k)}(x_j)\omega_j^k(x) \tag{2}$$

mit Polynomen $\omega_j^k \in \mathbb{P}_n$, die durch die $n+1$ Interpolationsbedingungen

$$\frac{d^l}{dx^l}\omega_j^k(x_i) \;=\; \delta_{lk}\delta_{ij}, \quad 0 \le l, k \le m_j, \quad 0 \le i, j \le m \tag{3}$$

festgelegt sind. Die Polynome ω_j^k werden wie folgt definiert:

$$\Omega_j(x) \;:=\; \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} (x - x_k)^{\mu_k + 1}\,, \tag{4}$$

$$\alpha_j \;:=\; \frac{d^{\mu_j}}{dx^{\mu_j}}\Big[\Omega_j(x)(x - x_k)^{\mu_j}\Big]\Big|_{x=x_j} \;=\; \mu_j! \cdot \Omega_j(x_j), \tag{5}$$

$$\omega_j^{\mu_j}(x) \;:=\; \frac{1}{\alpha_j} \cdot \Omega_j(x) \cdot (x - x_j)^{\mu_j}\,, \tag{6}$$

$$\omega_j^k(x) \;:=\; c_{jk} \cdot \Omega_j(x) \cdot (x - x_j)^k - \sum_{i=k+1}^{\mu_j} b_{ik}^{(j)}\omega_j^i(x), \quad k = \mu_j - 1, \ldots, 1, 0\,, \tag{7}$$

mit

$$c_{jk} \;:=\; \left(\frac{d^k}{dx^k}\big[\Omega_j(x)(x - x_j)^k\big]\Big|_{x=x_j}\right)^{-1} \;=\; \frac{1}{k! \cdot \Omega_j(x_j)} \tag{8}$$

und

$$b_{ik}^{(j)} \;:=\; \frac{d^i}{dx^i}\Big(c_{jk} \cdot \Omega_j(x)(x - x_j)^k\Big)\Big|_{x=x_j}, \quad i = k+1, \ldots, \mu_j \tag{9}$$

- Berechnungsverfahren 2 (Darstellung nach Newton):
  Für $f \in C^n[a,b]$ und für Punkte $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ ist der $(k-i)$-te verallgemeinerte Differenzenquotient wie folgt definiert: Für $x_i \neq x_k$ (mit $i < k$) ist

$$\Delta_t^{k-i}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)f(t) \;:=\; \frac{1}{x_k - x_i}\Big[\Delta_t^{k-i-1}(x_{i+1}, \ldots, x_k)f(t) - \Delta_t^{k-i-1}(x_i, \ldots, x_{k-1})f(t)\Big] \tag{10}$$

  und es gilt

$$\Delta_t^{k-i}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)f(t) \;=\; \Delta_s^1(x_i, x_k)\Delta_t^{k-i-1}(s, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1})f(t)\,. \tag{11}$$

  Für den Fall $x_i = x_{i+1} = \ldots = x_k$ (mit $i < k$) ist

$$\Delta_t^{k-i}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)f(t) \;:=\; \frac{f^{(k-i)}(x_i)}{(k-i)!}\,. \tag{12}$$

  Setze

$$\big(z_0, z_1, \ldots, z_n\big) \;:=\; \big(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(\mu_0+1)-\text{mal}}\,,\; \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{(\mu_1+1)-\text{mal}}\,,\; \ldots\,,\; \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{(\mu_m+1)-\text{mal}}\big) \tag{13}$$

  Dann gilt (mit $m_i := \mu_i + 1$, $i = 0, 1, \ldots, m$)

$$\begin{aligned} p(x) \;&=\; \sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x - z_j)\cdot\Delta_t^i(z_0, \ldots, z_i)f(t) \\ &=\; \Delta_t^0(z_0)f(t) \;+\; \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x - z_j)\cdot\Delta_t^i(z_0, \ldots, z_i)f(t) \\ &=\; \sum_{i=0}^{m}\prod_{l=0}^{i-1}(x - x_l)^{m_l}\cdot\left\{\sum_{j=0}^{\mu_i}(x - x_i)^j\cdot\Delta_t^{m_0+\ldots+m_{i-1}+j}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(\mu_0+1)-\text{mal}}, \ldots, \underbrace{x_{i-1}, \ldots, x_{i-1}}_{(\mu_{i-1}+1)-\text{mal}}, \underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{(j+1)-\text{mal}})f(t)\right\} \end{aligned} \tag{14}$$