Remes-Algorithmus

- **Problem:** Bestimme die beste polynomiale Approximation aus $\mathbb{P}_n$ an die Funktion $f \in C(X)$ bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf X, wobei $X \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$, $|X| \geq n+2$ und X kompakt.
- **Initialisierung:** Wähle eine Startreferenz $X^{(0)} = \{x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_{n+1}^{(0)}\} \subset X$ mit $x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \ldots < x_{n+1}^{(0)}$ und setze $i := 0$.
- **Verfahrensschritt:** Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^{(i)} & \ldots & \left(x_0^{(i)}\right)^n & 1 \\ 1 & x_1^{(i)} & \ldots & \left(x_1^{(i)}\right)^n & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^{(i)} & \ldots & \left(x_n^{(i)}\right)^n & (-1)^n \\ 1 & x_{n+1}^{(i)} & \ldots & \left(x_{n+1}^{(i)}\right)^n & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \\ \vdots \\ a_n^{(i)} \\ \sigma^{(i)}\varrho^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(x_0^{(i)}\right) \\ f\left(x_1^{(i)}\right) \\ \vdots \\ f\left(x_n^{(i)}\right) \\ f\left(x_{n+1}^{(i)}\right) \end{pmatrix}$$

  für die unbekannten Koeffizienten $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$ der besten Approximierenden

$$p_i(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)} x^j$$

  aus $\mathbb{P}_n$ auf $X^{(i)}$ mit dem Fehler $\varrho^{(i)} \geq 0$ und $\sigma^{(i)} \in \{-1, 1\}$. Bestimme ein $x^{(i)} \in X$ mit

$$\left|(f - p_i)(x^{(i)})\right| = \|f - p_i\|_\infty .$$

  Falls $\left|(f - p_i)(x^{(i)})\right| = \varrho^{(i)}$ gilt, ist $\hat{p} := p_i$ beste Approximierende an f auf X $\;\rightarrow\;$ Stopp!
  Sonst bestimme $X^{(i+1)}$, indem in $X^{(i)}$ ein Punkt durch $x^{(i)}$ wie folgt ersetzt wird:

  - **Fall 1**: Es gilt $x^{(i)} < x_0^{(i)}$. Falls $\operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x^{(i)})\right] = \operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x_0^{(i)})\right]$, ersetze $x_0^{(i)}$ durch $x^{(i)}$. Sonst ersetze $x_{n+1}^{(i)}$ durch $x^{(i)}$.
  - **Fall 2**: Es gilt $x_j^{(i)} < x^{(i)} < x_{j+1}^{(i)}$ für ein $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Falls $\operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x^{(i)})\right] = \operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x_j^{(i)})\right]$, ersetze $x_j^{(i)}$ durch $x^{(i)}$. Sonst ersetze $x_{j+1}^{(i)}$ durch $x^{(i)}$.
  - **Fall 3**: Es gilt $x_{n+1}^{(i)} < x^{(i)}$. Falls $\operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x^{(i)})\right] = \operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x_{n+1}^{(i)})\right]$, ersetze $x_{n+1}^{(i)}$ durch $x^{(i)}$. Sonst ersetze $x_0^{(i)}$ durch $x^{(i)}$.

  Ordne die Elemente von $X^{(i+1)}$ der Größe nach (durch Umnummerierung). Dann gilt $x_j^{(i+1)} < x_{j+1}^{(i+1)}$ und $\operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x_j^{(i+1)})\right] = -\operatorname{sign}\left[(f - p_i)(x_{j+1}^{(i+1)})\right]$ für alle $j = 0, 1, \ldots, n$. Ersetze i durch $i+1$ und führe einen weiteren Verfahrensschritt durch.
- **Behauptung:** Falls das Verfahren nicht schon nach endlich vielen Schritten endet, dann ist

$$\hat{p}(x) \;:=\; \sum_{j=0}^{n} \left(\lim_{i \to \infty} a_j^{(i)}\right) \cdot x^j$$

  beste Approximierende an f auf X.
- **Bemerkungen:**
  - Das Verfahren wird stark beschleunigt, wenn mehrere Punkte aus $X^{(i)}$ gleichzeitig verschoben bzw. ausgetauscht werden.
  - Die Folge der Referenzen $X^{(i)}$ muss nicht notwendig konvergieren, da die Alternante einer besten Approximation nicht eindeutig bestimmt sein muss.

BTU Cottbus-Senftenberg, Lehrstuhl Numerische und Angewandete Mathematik,
Letzte Bearbeitung: 8. Juli 2014