

Zusammenfassung: Einfache algebraische Strukturen

Sei M eine nichtleere Menge, auf der zwei Verknüpfungen $\circ : M \rightarrow M$ und $*$: $M \rightarrow M$ definiert seien. Bezüglich der Verknüpfungen $\circ$ und $*$ gibt es die folgenden Regeln:

$$(V1) \quad \forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(V2) \quad \forall a, b \in M : a \circ b = b \circ a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(V3) \quad \forall a \in M \exists e \in M : a \circ e = e \circ a = a \quad (\text{Existenz eines neutralen Elements})$$

$$(V4) \quad \forall a \in M \exists a^{-1} \in M : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e \quad (\text{Existenz eines inversen Elements})$$

$$(V5) \quad \forall a, b, c \in M : (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \quad (\text{Distributivgesetz})$$

$$(V6) \quad \forall a, b, c \in M : c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b) \quad (\text{Distributivgesetz})$$

Mit Hilfe dieser Regeln lassen sich die folgenden grundlegenden algebraischen Strukturen definieren:

- **Halbgruppe:** Eine algebraische Struktur $(M, \circ)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge M und einer Verknüpfung $\circ : M \rightarrow M$ heißt Halbgruppe, falls (V1) gilt. Eine Halbgruppe heißt kommutativ, wenn zusätzlich (V2) gilt. Gilt außer (V1) zusätzlich (V3), dann spricht man von einem Monoid.
- **Gruppe:** Eine algebraische Struktur $(M, \circ)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge M und einer Verknüpfung $\circ : M \rightarrow M$ heißt Gruppe, falls (V1), (V3) und (V4) gelten. Gilt zusätzlich (V2), so heißt $(M, \circ)$ kommutative Gruppe oder auch abelsche Gruppe.
- **Ring:** Eine algebraische Struktur $(M, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge M mit einer Addition $+: M \rightarrow M$ und einer Multiplikation $\cdot : M \rightarrow M$ heißt Ring, wenn
 - (a) $(M, +)$ eine kommutative Gruppe (neutrales Element der Addition ist $e = 0$),
 - (b) $(M, \cdot)$ eine Halbgruppe und
 - (c) die Distributivgesetze (V5) und (V6)gelten. Gilt bezüglich der Multiplikation $\cdot$ zusätzlich noch (V4) mit neutralem Element $e = 1$, so heißt $(M, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins.
- **Körper:** Eine algebraische Struktur $(M, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge M mit einer Addition $+: M \rightarrow M$ und einer Multiplikation $\cdot : M \rightarrow M$ heißt Körper, wenn
 - (a) $(M, +)$ eine kommutative Gruppe (neutrales Element $e = 0$),
 - (b) $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe (neutrales Element $e = 1$) und
 - (c) die Distributivgesetze (V5) und (V6)gelten.