

Inhomogene lineare Differentialgleichungen - Beispiele

Kleine Zusammenfassung zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen:

Gegeben sei eine Differentialgleichung (kurz: DGL) der Form

$$y' = a(x)y + s(x). \quad (*)$$

Ist $s(x) \equiv 0$, so heißt die DGL homogen, sonst inhomogen. Man nennt

$$y' = a(x)y \quad (**)$$

auch die zur inhomogenen DGL gehörende homogene DGL. Die Funktionen a und s seien stetig, y_h sei eine Lösung der homogenen DGL und y_p sei eine partikuläre, d.h. irgendeine feste Lösung der inhomogenen DGL (*). Für jede andere Lösung y von (*) gilt dann

$$(y - y_p)' = y' - y_p' = ay + s - (ay_p + s) = a(y - y_p),$$

d.h. auch $y - y_p$ löst die homogene DGL (**). Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung y von (*) notwendig die Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (***)$$

haben muss. Die Lösung der homogenen DGL (**) lässt sich durch Trennung der Variablen berechnen, d.h.

$$y' = a(x)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x) dx \Rightarrow \ln |y| = \int a(x) dx \Rightarrow y = c \cdot \exp\left(\int a(x) dx\right) \quad (\#)$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung kann mit der Methode der „Variation der Konstanten“ erhalten werden, d.h. wir fassen die Konstante $c \in \mathbb{R}$ in (#) als differenzierbare Funktion auf, d.h. wir machen den Ansatz

$$y_p(x) := c(x) \cdot \exp\left(\int a(x) dx\right), \quad (\#\#)$$

und versuchen $c = c(x)$ so zu bestimmen, dass y_p der inhomogenen DGL (*) genügt. Dazu setzt man y_p aus (\#\#) und die erste Ableitung y_p' in (*) ein. Dies liefert

$$c'(x) = s(x) \exp\left(-\int a(x) dx\right)$$

und durch Integration erhält man

$$c = c(x) = \int s(x) \exp\left(-\int a(x) dx\right) dx.$$

Beispiel 1 $y' + 2xy = 2x$

Zunächst lösen wir das homogene Problem $y' + 2xy = 0$ durch Trennung der Variablen, d.h. $\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx$, also $\ln |y| = -x^2 + \tilde{c}$ mit $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, was äquivalent ist zu $y_h := y = c \exp(-x^2)$ mit $c := e^{\tilde{c}} \in \mathbb{R}$. Das inhomogene Problem $y' + 2xy = 2x$ wird durch Variation der Konstanten gelöst, wozu wir die Konstante als von x abhängige Funktion betrachten und so den Ansatz $y(x) = c(x) \cdot \exp(-x^2)$ erhalten. Die Funktion y und ihre Ableitung $y'(x) = c'(x) \cdot \exp(-x^2) - 2x \cdot c(x) \cdot \exp(-x^2)$ setzen wir in die inhomogene Differentialgleichung ein und erhalten

$$y' + 2xy = c' \exp(-x^2) - 2xc \exp(-x^2) + 2xc \exp(-x^2) = 2x,$$

also $c' \exp(-x^2) = 2x$. Dies ist äquivalent zu $c' = 2x \exp(x^2)$ und damit erhalten wir

$$c(x) = \int 2x \exp(x^2) dx = \int e^z dz = \exp(x^2) + \hat{c}, \quad \hat{c} \in \mathbb{R},$$

wobei wir zur Integration die Substitution $z = x^2$ mit $dz = 2x \, dx$ verwendet haben. Nach obigem Ansatz ist also

$$y_p(x) := y(x) = c(x) \cdot \exp(-x^2) = 1 + \hat{c} \exp(-x^2), \quad \hat{c} \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Damit erhalten wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = c \exp(-x^2) + 1 + \hat{c} \exp(-x^2) = c^* \exp(-x^2) + 1,$$

wobei wir die beiden Konstanten zu $c^* := c + \hat{c}$ zusammengefaßt haben.

Beispiel 2: $y' = 2xy + x^3$

Zunächst lösen wir das homogene Problem $y' - 2xy = 0$ durch Trennung der Variablen, d.h. $\int \frac{dy}{y} = 2 \int x \, dx$, also $\ln|y| = x^2 + \tilde{c}$ mit $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, was äquivalent ist zu $y_h := y = c \exp(x^2)$ mit $c := e^{\tilde{c}} \in \mathbb{R}$. Das inhomogene Problem $y' - 2xy = x^3$ wird durch Variation der Konstanten gelöst, d.h. wie oben machen wir den Ansatz $y(x) = c(x) \cdot \exp(x^2)$. Die Funktion y und ihre Ableitung $y'(x) = c'(x) \cdot \exp(x^2) + 2x \cdot c(x) \cdot \exp(x^2)$ setzen wir in die inhomogene Differentialgleichung ein und erhalten

$$y' - 2xy = c' \exp(x^2) + 2xc \exp(x^2) - 2xc \exp(x^2) = x^3,$$

also $c' \exp(x^2) = x^3$. Dies ist äquivalent zu $c' = x^3 \exp(-x^2)$ und damit erhalten wir

$$c(x) = \int x^3 \exp(-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int z e^{-z} \, dz = \frac{1}{2} \left(-z e^{-z} + \int e^{-z} \, dz \right) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) (x^2 + 1) + \hat{c},$$

mit $\hat{c} \in \mathbb{R}$, wobei wir zur Integration die Substitution $z = x^2$ mit $dz = 2x \, dx$ sowie partielle Integration verwendet haben. Nach obigem Ansatz ist also

$$y_p(x) := y(x) = c(x) \cdot \exp(x^2) = \hat{c} \exp(x^2) - \frac{1}{2} (x^2 + 1), \quad \hat{c} \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Damit erhalten wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = c^* \exp(x^2) - \frac{1}{2} (x^2 + 1),$$

wobei wir die beiden Konstanten zu $c^* := c + \hat{c}$ zusammengefaßt haben.

Beispiel 3 (Anfangswertaufgabe): $y' = -y \sin(x) + \sin^3(x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

Als Lösung des homogenen Problems $y' + y \sin(x) = 0$ erhalten wir durch Variablentrennung und Integration $y = \hat{c} e^{\cos(x)}$ mit $\hat{c} \in \mathbb{R}$. Das inhomogene Problem $y' + y \sin(x) = \sin^3(x)$ wird durch Variation der Konstanten $c = c(x)$ gelöst, d.h. wir machen den Ansatz $y = c(x) e^{\cos(x)}$, woraus zunächst $y' = c'(x) e^{\cos(x)} - c(x) \sin(x) e^{\cos(x)}$ folgt. Einsetzen von y und y' in das inhomogene Problem liefert $c' = \sin^3(x) e^{-\cos(x)}$. Mit partieller Integration ergibt sich

$$c(x) = \int c'(x) \, dx = (\sin^2(x) - 2 \cos(x) - 2) e^{-\cos(x)} + \tilde{c}$$

mit $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, also

$$y(x) = c(x) e^{\cos(x)} = \tilde{c} e^{\cos(x)} + \sin^2(x) - 2 \cos(x) - 2. \quad (1)$$

Die Anfangswertbedingung $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ liefert $\tilde{c} = 4$, d.h. als Lösung ergibt sich insgesamt

$$y(x) = 4 e^{\cos(x)} = e^{\cos(x)} + \sin^2(x) - 2 \cos(x) - 2.$$

Beispiel 4 (Anfangswertaufgabe): $y' + ay = \sin(x) + e^{-5x}, \quad y(0) = 0$

Als triviale Lösung des homogenen Problems $y' + ay = 0$ erkennt man sofort $y = 0$. Für $y \neq 0$ liefert Trennung der Variablen und Integration $\ln|y| = -ax + \hat{c}$ mit $\hat{c} \in \mathbb{R}$. Dies läßt sich mit der trivialen Lösung zusammenfassen zu $y = ce^{-ax}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die Lösung des inhomogenen Problems $y' + ay = \sin(x) + e^{-5x}$ wird durch Variation der Konstanten $c = c(x)$ gelöst, d.h. wir machen den Ansatz $y = c(x)e^{-ax}$, woraus zunächst $y' = c'(x)e^{-ax} - a \cdot c(x) \cdot e^{-ax}$ folgt. Einsetzen von y und y' in das inhomogene Problem liefert $c' = (\sin(x) + e^{-5x})e^{ax}$. Integration liefert

$$c(x) = \int c'(x) dx = \frac{e^{ax}(a \sin(x) - \cos(x))}{a^2 + 1} + \frac{e^{(a-5)x}}{a-5} + \tilde{c}$$

mit $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Also ist

$$y(x) = c(x)e^{-ax} = \tilde{c}e^{-ax} + \frac{a \sin(x) - \cos(x)}{a^2 + 1} + \frac{e^{-5x}}{a-5}. \quad (2)$$

Die Anfangswertbedingung $y(0) = 0$ liefert $\tilde{c} = \frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{a-5}$.

Bemerkungen:

Die zu den Beispielen angegebenen Lösungen sind z. T. etwas „zu schnell“ notiert. Nach (***) setzt sich die allgemeine Lösung y aus der Lösung y_h des homogenen Problems und einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung zusammen, d.h. $y = y_h + y_p$. In Beispiel 3 sind dies $y_h(x) = \hat{c}e^{\cos(x)}$ und $y_p(x) = c(x)e^{-ax} = \tilde{c}e^{\cos(x)} + \sin^2(x) - 2\cos(x) - 2$, woraus

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (\hat{c} + \tilde{c})e^{\cos(x)} + \sin^2(x) - 2\cos(x) - 2. \quad (3)$$

folgt. Setzt man aber $c := \hat{c} + \tilde{c}$, so ist dies nichts anderes als (1), d.h. den Schritt (3) kann man in diesem Fall auch weglassen, da wir hier nur eine „neue“ Konstante erhalten. Die Einsparung dieses Schrittes läßt sich verallgemeinern: Faßt man (**), (#) und (##) zusammen, dann erhält man für die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)y + s(x)$ die einprägsame Formel

$$y = e^{A(x)} \cdot \left(c + \int s(x) \cdot e^{-A(x)} dx \right), \quad c \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

wobei A eine beliebige Stammfunktion von a ist.

Literatur:

Die Beweise der oben in knapper Form angegebenen Aussagen bzw. des Lösungsweges, die oben z.T. weggelassenen Voraussetzungen, tiefergehende Details und weitere Beispiele findet man in einer Vielzahl von Lehrbüchern. Besonders empfehlenswert ist zum Beispiel das folgende Lehrbuch: H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen - Einführung in Lehre und Gebrauch, Teubner, 3. Aufl., Stuttgart 1995.