

Differentialrechnung reeller Funktionen in einer Variablen

Definition der Differenzierbarkeit:

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ gegeben. Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0 , falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

existiert. Die Funktion f heißt differenzierbar in D , wenn f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkungen:

- Der Grenzwert $f'(x_0)$ in (1) heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt x_0 . Existiert für jedes $x \in D$ der Grenzwert $f'(x)$, dann heißt die so definierte Funktion f' *Ableitung von f* .
- Die Grenzwertbildung setzt voraus, dass es *mindestens eine* Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $y_n \in D$ und $y_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ gilt.
- Der *Differenzenquotient* $\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Sekante des Graphen von f durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$. Beim Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ geht die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über. Der Grenzwert $f'(x)$ ist also (im Falle der Existenz) die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

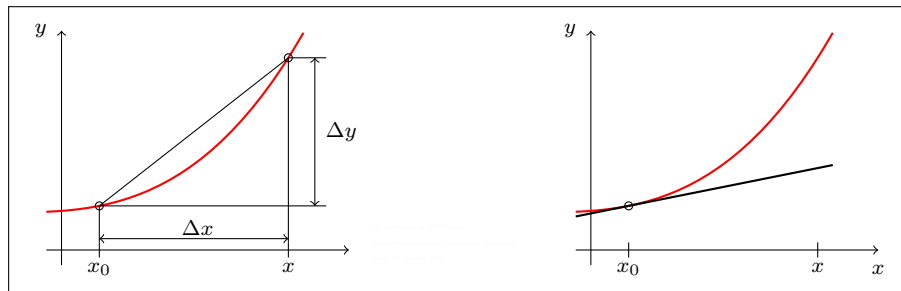


Abb. 1: Übergang vom Sekantenanstieg $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zum Tangentenanstieg $f'(x_0)$.

- Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig. Die Umkehrung gilt allgemein nicht!
- Analog zu den links- und rechtsseitigen Grenzwerten von Funktionen können *links-* bzw. *rechtsseitige Ableitung* in einem Punkt $x_0 \in D$ definiert werden:

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \uparrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad f'(x_0^+) := \lim_{x \downarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Den Differentialquotienten kann man alternativ auch wie folgt darstellen:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

- Statt $f'(x)$ schreibt man auch $\frac{df(x)}{dx}$. Die Schreibweise $\frac{df(x)}{dx}$ ist aber auch problematisch, da der Buchstabe x im Zähler und Nenner eine verschiedene Bedeutung hat. Ist z.B. $x = 0$, so kann man zwar $f(0)$, aber nicht $\frac{df(0)}{d0}$ schreiben. In diesem Fall verwendet man daher die Schreibweisen $\frac{df}{d}(0)$ oder auch $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$.

Differentiationsregeln:

Mit Hilfe der Grenzwertdefinition (1) bzw. (2) kann man die Berechnung der Ableitung immer durchführen, was oft sehr aufwändig sein kann. In den meisten Fällen verwendet man bei der Berechnung der Ableitung einer Funktion deshalb nicht direkt die Grenzwertdefinition, sondern führt die Ableitung mit gewissen Regeln auf schon bekannte Fälle zurück:

- Linearität: Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ in $x \in D$ differenzierbar und es gilt:

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

- Produktregel: Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist auch die Funktion $f \cdot g$ in $x \in D$ differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

- Quotientenregel: Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $g(x) \neq 0$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ in $x \in D$ differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

- Kettenregel: Seien $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D_1) \subseteq D_2 \subset \mathbb{R}$. Die Funktion f sei im Punkt $x \in D_1$ differenzierbar und g sei in $y := f(x) \in D_2$ differenzierbar. Dann ist die Hintereinanderausführung $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D_1$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Definition höherer Ableitungen:

Ist die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ selbst wieder in $x \in D$ differenzierbar, dann heißt

$$f''(x) := (f')'(x) := \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

die *zweite Ableitung von f in x* . Ist f'' in $x \in X$ differenzierbar, so erhält man entsprechend die dritte Ableitung $f'''(x)$ von f in x . Ist allgemein für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die $(n-1)$ -te Ableitung von f im Punkt $x \in D$ differenzierbar, dann erhält man durch vollständige Induktion die *n -te Ableitung von f in x* , wofür die folgenden Schreibweisen verwendet werden:

$$f^{(n)}(x) := \frac{d^n f(x)}{dx^n} := \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *n -mal differenzierbar in $D \subseteq \mathbb{R}$* , wenn f in jedem Punkt $x \in D$ n -mal differenzierbar ist. Die Funktion f heißt außerdem *n -mal stetig differenzierbar in $D \subseteq \mathbb{R}$* , wenn die n -te Ableitung $f^{(n)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Unter der 0-ten Ableitung einer Funktion ist die Funktion selbst zu verstehen.

Mittelwertsätze der Differentialrechnung:

- Satz von Rolle: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.
- Mittelwertsatz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in (a, b) differenzierbar sind. Weiter gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

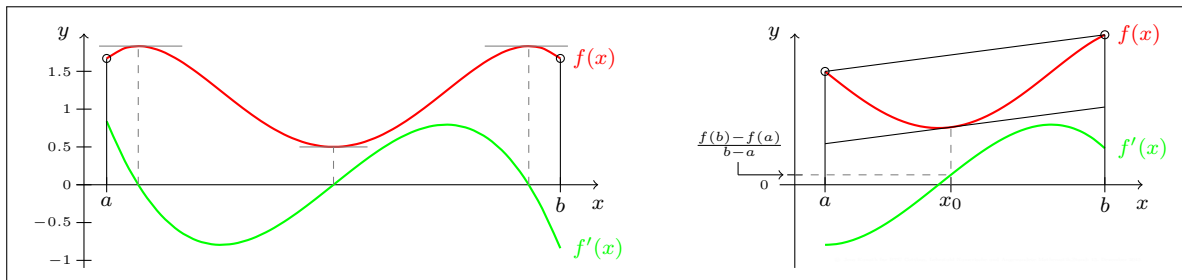


Abb. 2: Satz von Rolle (links) und Mittelwertsatz (rechts).

Anwendungen (Auswahl):

- Untersuchung des Monotonieverhaltens: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend [bzw. monoton fallend] in $[a, b]$, wenn für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$ [bzw. $f(x) \geq f(y)$]. Gilt dabei für kein Paar $x, y \in [a, b]$ die Gleichheit, dann heißt f auf $[a, b]$ *streng* monoton wachsend [bzw. *streng* monoton fallend]. Sei f in (a, b) differenzierbar. Falls

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) > 0 \\ f'(x) \leq 0 \\ f'(x) < 0 \end{array} \right\} \quad \text{für alle } x \in (a, b) \text{ gilt, dann ist } f \text{ in } [a, b] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\}.$$

(Bemerkung: Im Fall der „einfachen“ Monotonie (d.h. es gilt „ $\leq$ “ bzw. „ $\geq$ “) gilt jeweils auch die Umkehrung. Im Fall der strengen Monotonie gilt die Umkehrung aber allgemein nicht, wie die auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigende Funktion $f(x) = x^3$ zeigt, für die aber $f'(0) = 0$ gilt.)

- Berechnung lokaler Extrema: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) zweimal stetig differenzierbar.
 - Die Funktion f hat in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum [bzw. lokales Minimum] in $x_0 \in (a, b)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (a, b)$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$ [bzw. $f(x) \geq f(x_0)$]. Die Funktion f hat in $x_0 \in (a, b)$ ein *strenges* lokales Maximum [bzw. *strenges* lokales Minimum], wenn in den vorgenannten Ungleichungen das Gleichheitszeichen jeweils nur für $x = x_0$ zutrifft.
 - Besitzt die Funktion f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$. (notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium)
 - Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum. Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum. (hinreichendes Kriterium, die Umkehrung gilt allgemein nicht)
- Konvexität: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex (bzw. linksgekrümmt), wenn für alle $x, y \in [a, b]$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt: $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Gilt in der Ungleichung statt „ $\leq$ “ nur „ $<$ “, dann heißt f *streng* konvex auf $[a, b]$. Die Funktion f heißt [streng] konkav (bzw. rechtsgekrümmt), wenn $-f$ [streng] konvex ist. Sei f in (a, b) zweimal stetig differenzierbar. Falls

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) > 0 \\ f''(x) \leq 0 \\ f''(x) < 0 \end{array} \right\} \quad \text{für alle } x \in (a, b) \text{ gilt, dann ist } f \text{ in } [a, b] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{konvex} \\ \text{streng konvex} \\ \text{konkav} \\ \text{streng konkav} \end{array} \right\}.$$

- Berechnung von Wendepunkten: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) dreimal stetig differenzierbar.
 - Die Funktion f hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt, falls f für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav bzw. in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konvex ist.
 - Besitzt die Funktion f in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt, so gilt $f''(x_0) = 0$.
 - Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt. (Genauer: Gilt $f'''(x_0) > 0$, dann findet in x_0 ein Wechsel von konkav nach konvex statt bzw. gilt $f'''(x_0) < 0$, so findet in x_0 ein Wechsel von konvex nach konkav statt.)

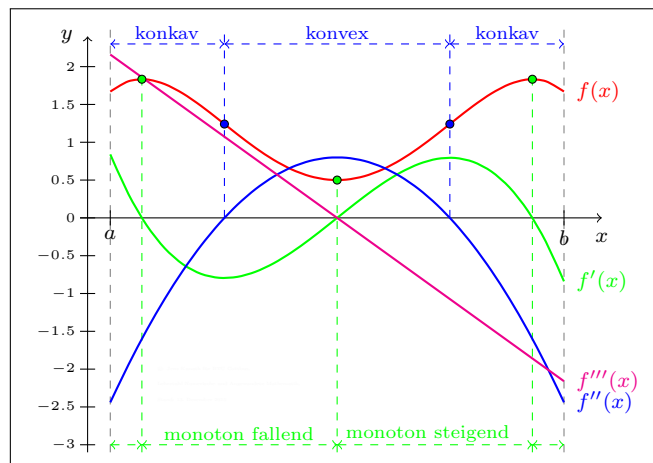


Abb. 3: Zusammenhänge zwischen einer Funktion f , ihren ersten drei Ableitungen, lokalen Extremwerten [●], Wendepunkten [●], Monotonie und Krümmungsverhalten.

- Regeln von de l'Hospital zur Berechnung von Grenzwerten: Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar für $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Für alle $x \in (a, b)$ sei $g'(x) \neq 0$ und es existiere der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann gelten folgende Aussagen (analog auch für den linksseitigen Grenzübergang nach b):

- Falls $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ gilt, dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Falls $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$ gilt, dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \leq x_0$ mit $a < x_0 < b$ und es gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- weitere Anwendungen:

- Nullstellenberechnung (Sekanten- und Newton-Verfahren)
- Taylorreihenentwicklung von Funktionen
- Approximation von Funktion durch Taylorpolynome (bzw. Taylorreihen)
- Fixpunkt-Iteration

Literatur:

Alle hier gegebenen Definitionen sowie insbesondere auch die Beweise der angegebenen Aussagen sind in jedem guten Analysis-Lehrbuch zu finden. Im Rahmen dieser Vorlesung ist dabei zum Beispiel

- Kreußler, B.; Pfister, G.: *Mathematik für Informatiker. Algebra, Analysis, diskrete Strukturen.*, eXamen.press., Springer, Berlin 2009
- Hartmann, P.: *Mathematik für Informatiker*, Vieweg, Wiesbaden 2004.

zu empfehlen. Darüber hinausgehende Informationen erhält man zum Beispiel in

- Forster, O.: *Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Vieweg, Wiesbaden 2001
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, Stuttgart 2009
- Walter, W.: *Analysis I*, Springer, Berlin 2004