

Integralrechnung

Definition 1 (Treppenfunktion, Zerlegung eines Intervalls):

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es eine Zerlegung

$$\Delta := \{a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b\}$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass g in jedem der offenen Intervalle (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, n-1$, konstant ist. Die Funktionswerte in den Zerlegungspunkten x_i sind beliebig.

Definition 2 (Integral für Treppenfunktionen):

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine bzgl. der Zerlegung $\Delta = \{a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b\}$ definierte Treppenfunktion, wobei $g(x) = c_i$ für alle $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ gelte. Unter dem Integral für die Treppenfunktion versteht man die Summe

$$\int_a^b g(x) dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

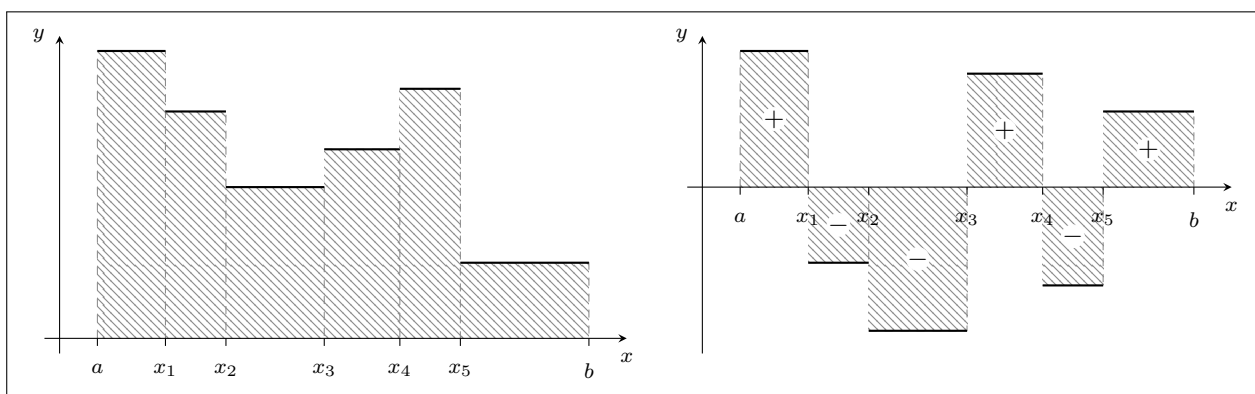


Abb. 1: Geometrische Interpretation des Integrals unter der Treppenfunktion $y = g(x)$ —: Gilt $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann kann man $\int_a^b g(x) dx$ als den Flächeninhalt der Fläche deuten, die zwischen der x -Achse und dem Graphen von g liegt (schraffierte Fläche  im linken Teil der Abbildung). Falls g auf einigen Teilintervallen negativ ist, dann sind die entsprechenden Flächen negativ in Ansatz zu bringen (rechts).

Definition 3 (Riemannsche Summe):

Sei $\Delta = \{a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine **beschränkte** Funktion. Eine Summe der Gestalt

$$R(f, \Delta) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

heißt Riemannsche Summe zur Zerlegung Δ . Speziell heißt

$$U(f, \Delta) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf(f([x_i, x_{i+1}])) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Untersumme von f zur Zerlegung Δ und

$$V(f, \Delta) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup(f([x_i, x_{i+1}])) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

heißt Obersumme von f zur Zerlegung Δ . Dabei ist

$$f([x_i, x_{i+1}]) := \{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

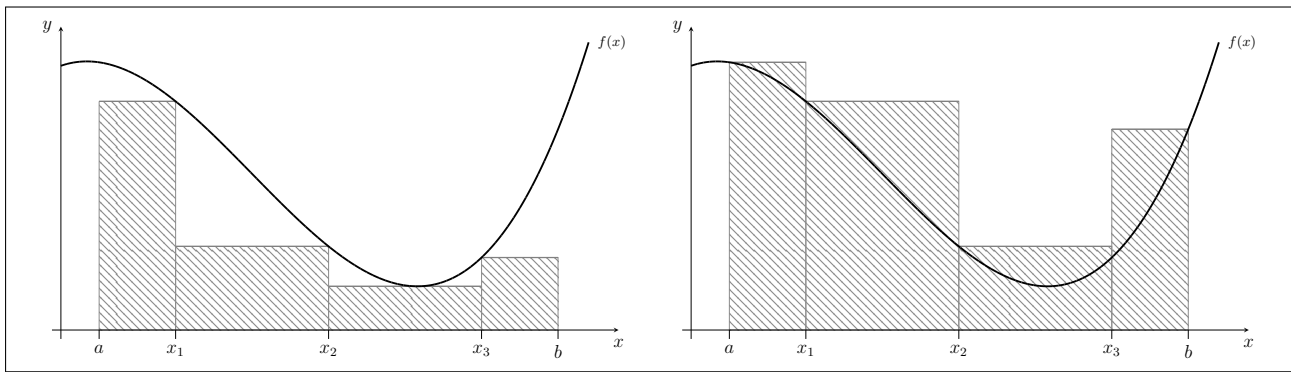


Abb. 2: Riemannsche Unter- und Obersumme.

Definition 4 (Riemann-Integral):

Sei $Z[a, b]$ die Menge aller beliebigen Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine **beschränkte** Funktion. Die Grenzwerte

$$u_f := \sup \{U(f, \Delta) \mid \Delta \in Z[a, b]\} \quad \text{bzw.} \quad v_f := \sup \{V(f, \Delta) \mid \Delta \in Z[a, b]\}$$

heißen Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral. Die Funktion f heißt (Riemann-) integrierbar über $[a, b]$, falls $u_f = v_f$ gilt. In diesem Fall heißt f auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx := u_f = v_f$$

heißt das **bestimmte Integral** oder auch Riemann-Integral von f über $[a, b]$.

Bemerkungen:

- Es gilt $U(f, \Delta) \leq R(f, \Delta) \leq V(f, \Delta)$.
- Ist $\tilde{\Delta}$ eine feinere Zerlegung als Δ , so gilt

$$U(f, \tilde{\Delta}) \geq U(f, \Delta) \quad \text{und} \quad V(f, \tilde{\Delta}) \leq V(f, \Delta).$$

Dabei entsteht eine feinere Zerlegung $\tilde{\Delta}$ z.B. aus Δ durch Hinzunahme weiterer Zerlegungspunkte.

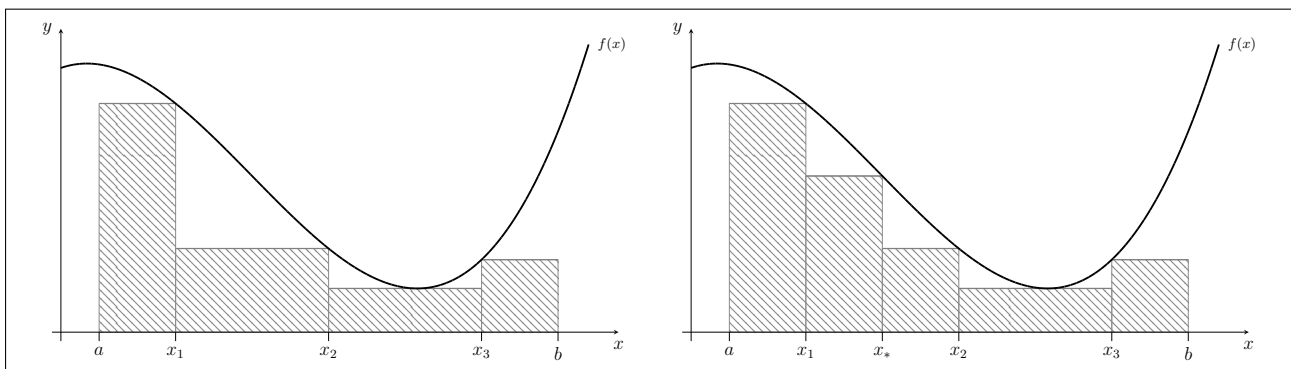


Abb. 3: Verfeinerung einer Untersumme durch Hinzunahme eines weiteren Zerlegungspunktes x_* .

- In Lehrbüchern gibt es verschiedene Herangehensweisen und Notationen bei der Einführung des Riemann-Integrals. Zum Beispiel mit Hilfe der Mengen

$$U(f) := \{g \mid g \text{ ist Treppenfunktion zu einer Zerlegung } \Delta \in Z[a, b] \text{ mit } g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b]\}$$

$$V(f) := \{g \mid g \text{ ist Treppenfunktion zu einer Zerlegung } \Delta \in Z[a, b] \text{ mit } g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b]\}$$

kann man das Riemannsche Unter- bzw. Oberintegral auch wie folgt definieren:

$$u_f := \sup \left\{ \int_a^b g(x) dx \mid g \in U(f) \right\} \quad \text{und} \quad v_f := \inf \left\{ \int_a^b g(x) dx \mid g \in V(f) \right\} .$$

- Zu einer Zerlegung $\Delta_n = \{a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b\}$ bezeichne

$$d_n := \max_{k \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{k+1} - x_k)$$

die Feinheit von Δ_n , mit der man eine weitere äquivalente Definition des bestimmten Integrals erhält: Falls für jede beliebige Folge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ die Grenzwerte

$$I_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, \Delta_n) \quad \text{und} \quad I_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} V(f, \Delta_n)$$

existieren und immer die gleichen Zahlen I_1 bzw. I_2 ergeben, und außerdem $I_1 = I_2$ gilt, dann heißt f auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx = I_1$$

bestimmtes Integral von f über $[a, b]$.

- Einige Autoren verzichten auf die Verwendung von Unter- und Oberintegral, und verwenden statt dessen die Riemannsche Summe

$$R(f, \Delta_n, P_n) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) , \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

mit einer Menge $P_n := \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ beliebiger Zwischenpunkte $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Damit ergibt sich dann folgende Definition des bestimmten Integrals: Falls für jede beliebige Folge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ und beliebige Wahl der Zwischenpunkte P_n der Grenzwert

$$I := \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, \Delta_n, P_n)$$

existiert und immer die gleiche Zahl I ergibt, dann heißt f auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx = I$$

bestimmtes Integral von f über $[a, b]$.

- Für $a > b$ setzt man

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ,$$

und für $a = b$

$$\int_a^b f(x) dx = 0 .$$

- Die Approximation bestimmter Integrale durch Zwischensummen stellt die Grundidee für die Konstruktion sogenannter Quadraturformeln für die numerische Integration dar, wie z.B. die Rechteck-, Trapez- oder Simpson-Regel.

Satz 2 (Linearität und Monotonie)

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ seien beliebige Konstanten. Dann ist auch die Funktion $\lambda \cdot f + \mu \cdot g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx .$$

Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann folgt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx .$$

Satz 3 (Integralabschätzungen) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$(a) \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

$$(b) \quad \text{Aus } \alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ für alle } x \in [a, b] \text{ folgt } \alpha \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \beta \cdot (b - a) \quad .$$

Satz 4 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a) .$$

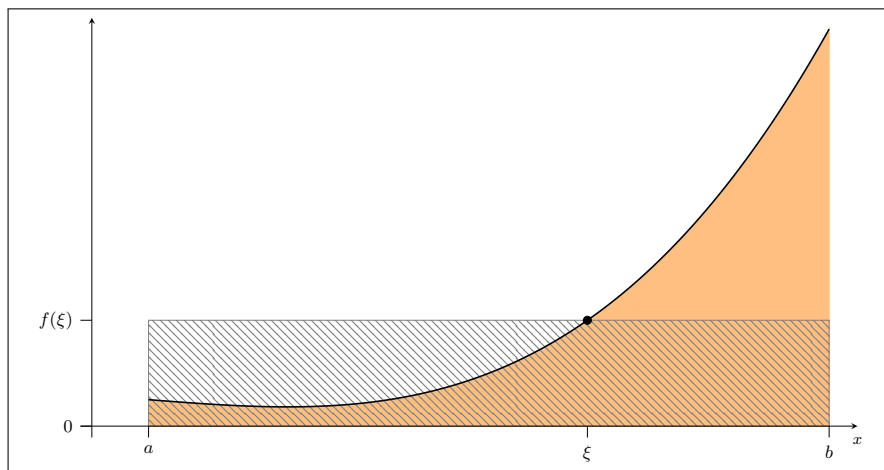


Abb. 4: Geometrisch bedeutet der Mittelwertsatz der Integralrechnung für eine positive Funktion f , dass die Fläche unter dem Graphen --- von f gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $b - a$ und $f(\xi)$ ist.

Definition 5 (Stammfunktion):

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Jede auf D differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion f , falls gilt:

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D$$

Satz 5: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Die durch das bestimmte Integral

$$F_a(x) := \int_a^x f(z) \, dz, \quad x \in D$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f . Jede andere Stammfunktion F von f hat die Gestalt

$$F(x) = F_a(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

Satz 6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) .$$

Bemerkungen:

- Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ ist eine reelle Zahl, während das unbestimmte Integral $\int f(x) \, dx$ eine Menge von Funktionen ist, nämlich die Menge aller Stammfunktionen von f .
- Für den Hauptsatz der Differentialrechnung ist auch folgende Schreibweise üblich:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

- Eine Vielzahl von Grundintegralen findet man in Formelsammlungen, hier einige einfache Beispiele, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist:

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ für $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$

Satz 7 (Substitutionsregel 1)

Es seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt mit der Substitution $z = g(x)$ und dem Differential $dz = g'(x) \, dx$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(z) \, dz .$$

Bemerkungen:

- Es ist zu beachten, dass beim bestimmten Integral die Integrationsgrenzen mit zu transformieren sind:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \, dz$$

- Wichtige Spezialfälle der Substitutionsregel sind:

- lineare Substitution: $\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist
- $\int (f(x))^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$, $c \in \mathbb{R}$

Satz 8 (Substitutionsregel 2)

Es seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare und *umkehrbare* (!) Funktion. Weiter sei $S(z)$ eine Stammfunktion von $f(g(z)) \cdot g'(z)$. Dann gilt mit der Substitution $x = g(z)$ und dem Differential $dx = g'(z) dz$

$$\int f(x) dx = \int f(g(z)) \cdot g'(z) dz = S(z) + k = S(g^{-1}(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Satz 9 (Partielle Integration)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Sind $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Definition 10 (Uneigentliches Integral)

Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die über jedem Intervall $[\varepsilon, b]$ für $a < \varepsilon < b$ integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \downarrow a} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx$ existiert, dann setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow a} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ heißt *uneigentliches Integral*. Analog definiert man für $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

falls f auf jedem der Intervalle $[a, b]$ für $b > a$ integrierbar ist und der Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert.

Literatur:

Diese Zusammenstellung ersetzt nicht die Vorlesung. Für Zusammenhänge zwischen den Aussagen und insbesondere für die Beweise der genannten Aussagen sei auf die Vorlesung sowie auf eine Vielzahl von Lehrbüchern verwiesen! Im Rahmen dieser Vorlesung sind zum Beispiel die Lehrbücher

- Kreußler, B.; Pfister, G.: *Mathematik für Informatiker. Algebra, Analysis, diskrete Strukturen.*, eXamen.press., Springer, Berlin 2009
- Hartmann, P.: *Mathematik für Informatiker*, Vieweg, Wiesbaden 2004.

zu empfehlen. Darüber hinausgehende Informationen erhält man zum Beispiel in

- Forster, O.: *Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Vieweg, Wiesbaden 2001
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, Stuttgart 2009
- Walter, W.: *Analysis I*, Springer, Berlin 2004