

Zusammenfassung zur Konvergenz von Folgen

1. Definition des Konvergenzbegriffs

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen a (in Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$), falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Hinweise: Bei Konvergenzbeweisen muss dieses Kriterium *für alle* $\varepsilon > 0$ überprüft werden! Dabei ist zu beachten, dass $n_0 \in \mathbb{N}$ von einem *zuvor* gewählten $\varepsilon > 0$ abhängen darf. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

2. Beschränkte Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

- nach unten beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$a_n \geq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

- nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$a_n \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

- beschränkt, wenn es eine Konstante $S \geq 0$ gibt, so dass

$$|a_n| \leq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Bemerkung: Eine beschränkte Folge ist insbesondere nach unten und nach oben beschränkt.

3. Monotone Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

- monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- monoton wachsend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- streng monoton wachsend, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

4. Bestimmte Divergenz

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$, wenn gilt

$$\forall S \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : a_n > S$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen $-\infty$, wenn die Folge $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), dann schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$). Statt bestimmt divergent sagt man auch uneigentlich konvergent.

5. Unbestimmte Divergenz

Unbestimmte Divergenz einer reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegt dann vor, wenn die Folge weder bestimmt divergent noch konvergent ist.

6. Definition Cauchy-Folge

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Hinweise: Es ist zu beachten, dass $n_0 \in \mathbb{N}$ von einem *zuvor* gewählten $\varepsilon > 0$ abhängen darf. Es genügt insbesondere *nicht*, nur

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

nachzuweisen!

7. Häufungspunkte

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen a konvergiert.

8. Konvergenzsätze (Auswahl)

- (a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- (b) Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen konvergiert.
- (c) „Sandwichregel“: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Sei außerdem $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist auch die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.
- (d) Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (e) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
- (f) Eindeutigkeit des Grenzwerts: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, dann ist $a = b$.

9. Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, d.h. es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

- (a) Die Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$$

- (b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$$

- (c) Die Folge $(\lambda \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda a$$

- (d) O.B.d.A. gelte $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $b \neq 0$ und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

- (e) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$, dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Diese Zusammenstellung ersetzt nicht die Vorlesung. Für Zusammenhänge zwischen den Aussagen und insbesondere für die Beweise der genannten Aussagen sei auf die Vorlesung sowie auf eine Vielzahl von Lehrbüchern verwiesen!

Anhang: Zur $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge

Erfahrungsgemäß fällt es vielen Studenten schwer, sich mit der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge anzufreunden. Dies hängt oft damit zusammen, dass sich die Betreffenden nicht so recht vorstellen können, was damit eigentlich gemeint ist. Als Ergänzung sei dies hier an zwei einfachen Beispielen anschaulich dargestellt. Zunächst halten wir aber fest, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

äquivalent ist zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (2)$$

Beispiel 1

Beweisen Sie unter Verwendung der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Folgenkonvergenz, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ für $a_n := (-1)^n \cdot 2$ für $n \leq 1234$ bzw. $a_n := 2$ für $n > 1234$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wählen wir $n_0 = 1234$, dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - 2| = |2 - 2| = 0 < \varepsilon$$

Für diese ab $n = 1234$ konstante Folge ist n_0 insbesondere von der Wahl von $\varepsilon > 0$ unabhängig. Dies ist aber allgemein nicht möglich, siehe dazu Beispiel 2 weiter unten!

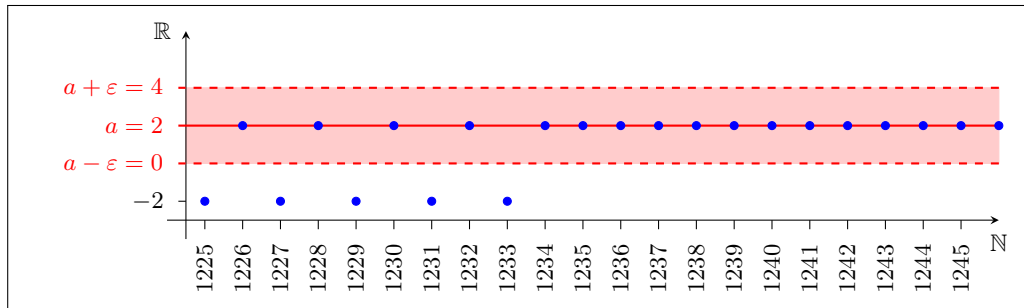


Abb. 1: Für $\varepsilon = 2$ liegen **alle** Glieder $\bullet$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Beispiel 1 für $n \geq n_0 = 1234$ innerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (0, 4)$. Würde man n_0 kleiner wählen, dann wäre das Konvergenzkriterium (1) verletzt, da die Glieder a_n für ungerades $n < 1234$ nicht mehr in der ε -Umgebung des Grenzwertes $a = 2$ liegen.

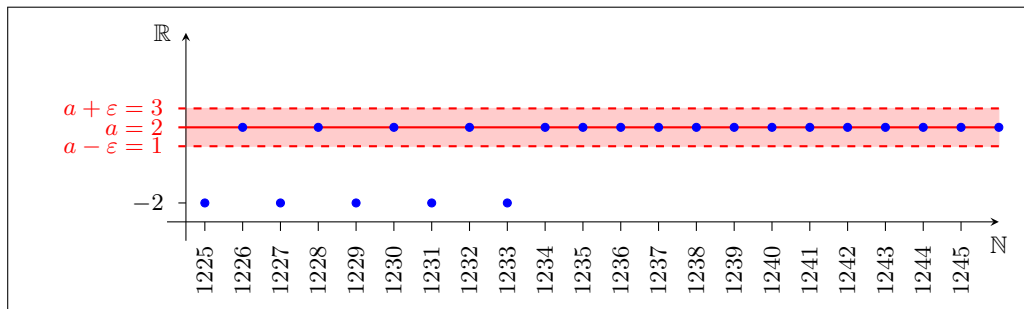


Abb. 2: Auch für $\varepsilon = 1$ liegen **alle** Glieder $\bullet$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \geq n_0 = 1234$ innerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (1, 3)$.

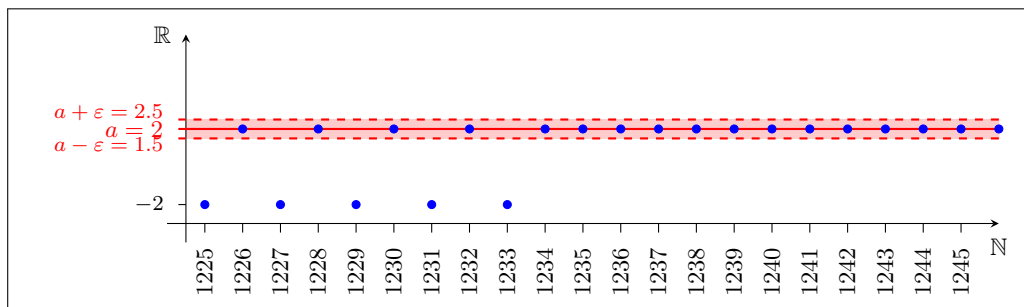


Abb. 3: Bei weiterer Halbierung von ε auf $\varepsilon = 0.5$ liegen **alle** Glieder $\bullet$ der Folge für $n \geq n_0 = 1234$ innerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (1.5, 2.5)$.

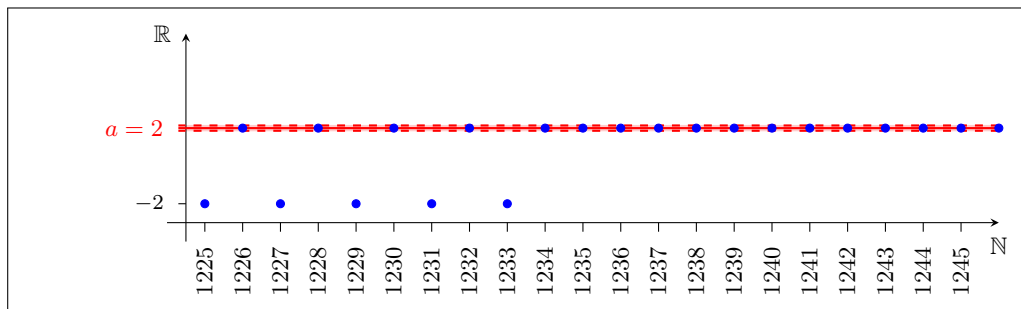


Abb. 4: Wir können $\varepsilon > 0$ also beliebig klein wählen (hier sei „beliebig klein“ nur angedeutet), aber trotzdem liegen immer alle Folgenglieder a_n für $n \geq n_0 = 1234$ innerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Für diese konstante Folge besteht eben zusätzlich die Besonderheit, dass man ein von ε unabhängiges n_0 angeben kann.

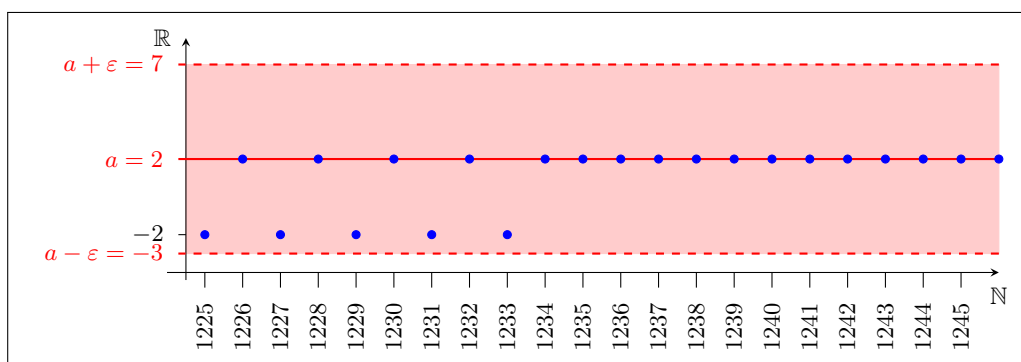


Abb. 5: Die Bedingung (1) muss für eine konvergente Folge auch für jede beliebig große Wahl von $\varepsilon > 0$ gelten. In dieser Abbildung wurde $\varepsilon = 5$ gewählt, und damit gilt (wie übrigens für alle $\varepsilon > 4$) sogar $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit erst recht für alle $n \geq n_0 = 1234$.

Beispiel 2

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ für $a_n := \frac{1}{n}$ mit $n \geq 1$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Wählen wir $n_0 := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$, dann folgt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

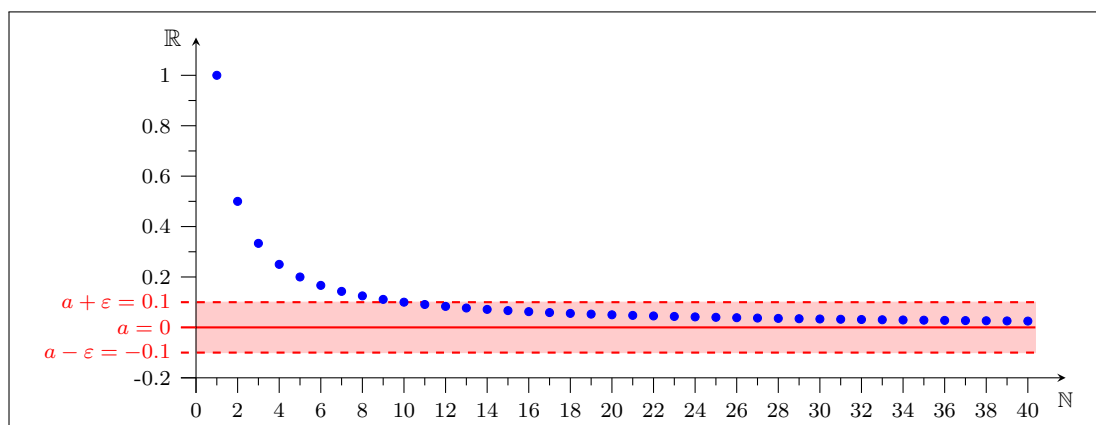


Abb. 6: Für $\varepsilon = 0.1$ liegen **alle** Glieder $\bullet$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ aus Beispiel 2 für $n \geq n_0 = 11$ innerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (-0.1, 0.1)$. Würde man n_0 kleiner wählen, dann wäre das Konvergenzkriterium (1) nicht erfüllt, da die Glieder a_n für $n < n_0$ nicht mehr in der ε -Umgebung des Grenzwertes $a = 0$ liegen.

Bei der Folge in Beispiel 2 ist n_0 in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ zu wählen. Die nachfolgende Tabelle nennt einige n_0 in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$. Deutlich erkennt man, dass n_0 umso größer ist, je kleiner ε gewählt wird.

ε	$\frac{1}{\varepsilon}$	$n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$
1	1	2
0.5	2	3
0.25	4	5
0.125	8	9
0.1	10	11
0.05	20	21
0.01	100	101
0.001234	810.3727714749	812
0.00123	813.0081300813	815
0.0012	833.3333333333	835
0.001	1000	1001
0.0001	10000	10001
10^{-5}	10^5	100001
$1.234 \cdot 10^{-6}$	810372.7714748784	810374
$5.6789 \cdot 10^{-9}$	176090440.05000967	176090442
10^{-10}	10^{10}	$1 + 10^{10}$

Bemerkungen:

- Wichtig ist also, dass (1) für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt sein muss! Soll die Konvergenz mit Hilfe von (1) nachgewiesen werden, dann sollte ein solcher Beweis standardmäßig folgenden Satz enthalten: „Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.“
- **Anschaulich** bedeutet Konvergenz im Sinne von (1) den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$.
- In der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz (1) wird die Existenz von **mindestens** einer natürlichen Zahl n_0 gefordert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Es ist zu beachten, dass n_0 von ε abhängen darf (aber nicht notwendig abhängen muss, wie Beispiel 1 zeigt). Hat man ein kleinstes n_0 mit der genannten Eigenschaft bestimmt, so könnte man natürlich auch jedes beliebige $n > n_0$ als n_0 wählen, d.h. n_0 ist mitnichten eindeutig.
- Oft wird bei der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge in der Literatur statt $|a_n - a| < \varepsilon$ auch die Abschätzung $|a_n - a| \leq \varepsilon$ angegeben. Dies ist aber zu (1) gleichwertig, hat aber ggf. auf konkrete Werte von n_0 Auswirkung. Dies mache man sich etwa am Beispiel 2 klar, wo konkret $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ gesetzt wird. Würde man im Beispiel 2 nur $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ verwenden, dann würde beispielsweise für $\varepsilon = 0.1$ und $n = n_0 = 10$ gelten $|a_n - a| = 0.1 = \varepsilon$, d.h. (1) wäre mit diesem n_0 nicht erfüllt (wohl aber, wenn man in (1) „<“ durch „≤“ ersetzen würde).