

Partialbruchzerlegung

Gegeben sei ein rationaler Ausdruck der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_s x^s}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_w x^w},$$

mit $\alpha_0, \dots, \alpha_s, \beta_0, \dots, \beta_w \in \mathbb{R}$ und $s, w \in \mathbb{N}$, d.h. p und q sind Polynome vom Grad s bzw. w .

Vorgehensweise bei der Partialbruchzerlegung:

1. Falls $\frac{p(x)}{q(x)}$ eine unecht gebrochen rationale Funktion ist, d.h. es gilt $s \geq w$, dann ist zuerst Polynomdivision durchzuführen, wobei $\frac{p(x)}{q(x)}$ in einen ganzrationalen (= polynomialen) und einen echt gebrochen rationalen Summanden zerlegt wird. Für die weiteren Teilschritte wird nur noch der echt gebrochen rationale Anteil betrachtet. O.b.d.A. gelte also nachfolgend $s < w$.
2. Bestimmung der Nullstellen des Nenners $q(x)$ und anschließende Faktorisierung von $q(x)$. Besitzt q dabei nur reelle Nullstellen, wobei x_1 m_1 -fache, x_2 m_2 -fache, $\dots$, x_k m_k -fache Nullstelle, so hat $q(x)$ die Gestalt

$$q(x) = \alpha(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

mit einem geeigneten Leitkoeffizienten $\alpha \in \mathbb{R}$. Reelle Polynome vom Grad w haben insgesamt w Nullstellen in $\mathbb{C}$, wobei die nichtreellen Nullstellen in Paaren auftreten, die sich zu quadratischen und insbesondere reellen Faktoren der Gestalt $(x^2 + 2ux + (u^2 + v^2))^j = ((x - z)(x - \bar{z}))^j$ zusammenfassen lassen, wobei u der Realteil und v der Imaginärteil der komplexen Nullstelle z ist. Allgemeiner hat $q(x)$ damit die Gestalt

$$q(x) = \alpha(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}(x^2 + \gamma_1 x + \delta_1)^{n_1} \dots (x^2 + \gamma_l x + \delta_l)^{n_l}$$

3. Jeder reellen Nullstelle wird ein Partialbruch der folgenden Gestalt zugeordnet:

- x_i ist einfache Nullstelle $\rightarrow \frac{a_{i1}}{x - x_i}$
- x_i ist zweifache Nullstelle $\rightarrow \frac{a_{i1}}{x - x_i} + \frac{a_{i2}}{(x - x_i)^2}$
- $\vdots$
- x_i ist m -fache Nullstelle $\rightarrow \frac{a_{i1}}{x - x_i} + \frac{a_{i2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{a_{im}}{(x - x_i)^m}$

Jedem quadratischen, reell nicht zerlegbaren Faktor wird ein Partialbruch der folgenden Form zugeordnet:

- $x^2 + \gamma_1 x + \delta_1$ ist einfacher Faktor $\rightarrow \frac{b_{i1}x + c_{i1}}{x^2 + \gamma_1 x + \delta_1}$
- $x^2 + \gamma_1 x + \delta_1$ ist zweifacher Faktor $\rightarrow \frac{b_{i1}x + c_{i1}}{x^2 + \gamma_1 x + \delta_1} + \frac{b_{i2}x + c_{i2}}{(x^2 + \gamma_1 x + \delta_1)^2}$
- $\vdots$
- $x^2 + \gamma_1 x + \delta_1$ ist n -facher Faktor $\rightarrow \frac{b_{i1}x + c_{i1}}{x^2 + \gamma_1 x + \delta_1} + \frac{b_{i2}x + c_{i2}}{(x^2 + \gamma_1 x + \delta_1)^2} + \dots + \frac{b_{in}x + c_{in}}{(x^2 + \gamma_1 x + \delta_1)^n}$

4. Partialbruchansatz: Die echt gebrochen rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ ist Summe der Partialbrüche, d.h.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x^2 + \gamma_1 x + \delta_1)^j} \quad (*)$$

5. Bestimmung der Koeffizienten

- 5.1. Multiplikation des Partialbruchansatzes (*) mit dem Polynom $q(x)$ in der faktorisierten Form. Dabei kürzen sich die Nenner der einzelnen Summanden heraus. Die so erhaltene Gleichung wird auch als *Hauptgleichung (für die Partialbruchzerlegung)* bezeichnet.
- 5.2. Die rechte Seite der Hauptgleichung wird ausmultipliziert und anschließend nach den Potenzen von x sortiert. Auf der linken und rechten Seite werden dann die Koeffizienten verglichen. Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem, das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus gelöst werden kann.
- 5.3. Alternativ zum Lösungsweg 5.2 können für x auch $m_1 + m_2 + \dots + m_k + 2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_l$ verschiedene Werte eingesetzt werden. Auch dies führt auf ein lineares Gleichungssystem.
- 5.4. Beide Lösungswege 5.1 und 5.2 können abgekürzt werden, falls $q(x)$ reelle Nullstellen besitzt, d.h. Faktoren der Form $(x - x_i)^{m_i}$ besitzt. Dann können in der Hauptgleichung zunächst die reellen Nullstellen von $q(x)$ eingesetzt werden. Dies liefert die Koeffizienten von Summanden, die einfachen Nullstellen von $q(x)$ zugeordnet sind sowie die Koeffizienten von mehrfachen Nullstellen mit dem höchsten Exponenten. Die restlichen Koeffizienten bestimmt man dann durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen von Werten.

6. Beispiele:

- 6.1. Zu bestimmen sei die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$$

Der zugehörige Partialbruchansatz ist

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

Multiplikation mit $q(x) = (x-1)(x+1)$ liefert

$$x+2 = a(x-1) + b(x+1) = (a+b)x - a + b$$

Nach 5.2. ist dies äquivalent zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -a + b &= 2 \end{aligned}$$

Nach 5.3. setzen wir zum Beispiel die Werte $x = 2$ und $x = -2$ in die Hauptgleichung ein, man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + 3b &= 4 \\ -3a - b &= 0 \end{aligned}$$

Beide Gleichungssysteme führen auf die eindeutige Lösung $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Nach 5.4. können auch die beiden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ in die Hauptgleichung eingesetzt werden. Dies liefert die Gleichungen $3 = 2b$ bzw. $1 = -2a$, also $a = -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{3}{2}$.

- 6.2. Zu bestimmen sei die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 1}$$

Da der Grad des Zählerpolynoms größer ist als der Grad des Nennerpolynoms, muss zuerst Polynomdivision durchgeführt werden:

$$\frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{x+2}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$$

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$ ist aus 6.1 bereits bekannt.

6.3. Zu bestimmen sei die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 + x + 4}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$$

Der zugehörige Partialbruchansatz ist

$$\frac{x^2 + x + 4}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Multiplikation mit $q(x) = (x-1)(x+1)^2(x^2+1)$ liefert

$$\begin{aligned} & x^2 + x + 4 \\ = & a(x+1)^2(x^2+1) + b_1(x-1)(x+1)(x^2+1) + b_2(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x-1)(x+1)^2 \\ = & (a+b_1+c)x^4 + (2a+b_2+c+d)x^3 + (2a-b_2-c+d)x^2 + (2a+b_2-c-d)x + (a-b_1-b_2-d) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b_1 + c &= 0 \\ 2a + b_2 + c + d &= 0 \\ 2a - b_2 - c + d &= 1 \\ 2a + b_2 - c - d &= 1 \\ a - b_1 - b_2 - d &= 4 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus berechnet man die eindeutige Lösung $a = \frac{3}{4}$, $b_1 = -\frac{5}{4}$, $b_2 = -1$, $c = \frac{1}{2}$ und $d = -1$. Alternativ liefert die unter 5.4. beschriebene Methode durch Einsetzen der reellen Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ zunächst die Gleichungen

$$6 = 8a \quad \text{und} \quad 4 = -4b_2$$

also $a = \frac{3}{4}$ und $b_2 = -1$. Die restlichen Unbekannten werden wieder durch Koeffizientenvergleich bestimmt, d.h. obiges Gleichungssystem geht durch Einsetzen von a und b_2 über in

$$\begin{aligned} b_1 + c &= -\frac{3}{4} \\ c + d &= -\frac{1}{2} \\ -c + d &= -\frac{3}{2} \\ -c - d &= \frac{1}{2} \\ -b_1 - d &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Zur Lösung dieses Systems ist der Gauß-Algorithmus nicht notwendig, denn: Addition der zweiten und dritten Gleichung liefert $2d = -2$, also $d = -1$. Einsetzen von d in die letzte Gleichung liefert $b_1 = -\frac{5}{4}$, und schließlich ergibt sich damit aus der ersten Gleichung $c = \frac{1}{2}$.