

Die Peano - Axiome und vollständige Induktion

Seien $\mathbb{N}$ eine Menge und 1 ein Element von $\mathbb{N}$. Dann fordern die Peano - Axiome:

(P1) $1 \in \mathbb{N}$

(P2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$
„Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen Nachfolger $n + 1$.“

(P3) $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow N(n) \neq N(m)$
„Verschiedene Elemente aus $\mathbb{N}$ haben verschiedene Nachfolger.“

(P4) $1 \notin N(\mathbb{N})$
„Kein Element aus $\mathbb{N}$ hat 1 als Nachfolger.“

(P5) Induktions-Axiom: Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

(a) $1 \in M$

(b) $n \in M \Rightarrow N(n) \in M$

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

- Mit $\mathbb{N}$ identifizieren wir die Menge der natürlichen Zahlen. Die Peano-Axiome sind aber auch auf andere Mengen übertragbar, bei denen das „Nachfolgerprinzip“ sinnvoll anwendbar ist.
- Unter den natürlichen Zahlen verstehen wir hier die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$. Unter Mathematikern besteht immer noch ein „Streit“ darüber, ob die Null zu den natürlichen Zahlen gehört. Man beachte daher, dass in der Literatur oft auch $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$ gilt! Wenn wir hier die natürlichen Zahlen einschließlich der Null benötigen, so werden wir das Symbol $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ verwenden. Die Peano-Axiome sind selbstverständlich auch für $\mathbb{N}_0$ gültig.
- Die in (P3) verwendete injektive Abbildung $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wird oft auch als „Nachfolgerfunktion“ bezeichnet.
- Die Axiome (P1) bis (P4) gewährleisten, dass man mit Hilfe der Nachfolgeabbildung N stets zu neuen natürlichen Zahlen kommt.
- Das Axiom (P5) wird auch als Vollständigkeitsaxiom bezeichnet und stellt sicher, dass mittels der Nachfolgeabbildung auch alle natürlichen Zahlen erreicht werden. Das Axiom (P5) ist die Grundlage für das

Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $A(n)$ sei für $n \geq n_0$ eine Aussage. Um die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ zu beweisen, ist folgendes zu zeigen:

(IA) $A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang)

(IV) Annahme: Für ein beliebiges $n \geq n_0$ ist $A(n)$ richtig. (Induktionsvoraussetzung)

(IS) Falls $A(n)$ richtig ist, so ist auch $A(n + 1)$ richtig [d.h. aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$]. (Induktionsschritt)

Man beachte dabei, dass nicht notwendig $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$ gelten muss, sondern $n_0 \in \mathbb{N}_0$ ist je nach Aufgabenstellung verschieden!

Beispiele zum Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

- (1) Behauptung: Es gilt $S(n) := \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

(IA) Für $n_0 = 1$ gilt $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, d.h. für n_0 ist die Behauptung richtig.

(IV) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $S(n) := \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(IS) Man berechnet $S(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = n+1 + \sum_{k=1}^n k = n+1 + S(n) = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

- (2) Behauptung: Es gilt $n^2 > 2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

Beweis:

(IA) Für $n_0 = 3$ gilt $n^2 = 9 > 7 = 2n+1$, d.h. für $n_0 = 3$ ist die Behauptung richtig.

(IV) Für beliebiges $n \geq n_0 = 3$ gelte $n^2 > 2n+1$.

(IS) Man berechnet $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \stackrel{(IV)}{>} 2n+1 + 2n+1 \stackrel{n \geq 3}{>} 2n+3 = 2(n+1) + 1$.

- (3) Behauptung: $a_n := 5^{2n} - 3^{2n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.

Beweis:

(IA) Für $n_0 = 1$ ist $a_1 = 5^2 - 3^2 = 16$ durch 8 teilbar.

(IV) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := 5^{2n} - 3^{2n}$ durch 8 teilbar.

(IS) Man berechnet

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)} = 5^{2n} \cdot 5^2 - 3^{2n} \cdot 3^2 \\ &= 24 \cdot 5^{2n} + 5^{2n} - 8 \cdot 3^{2n} - 3^{2n} = (5^{2n} - 3^{2n}) + 8 \cdot (3 \cdot 5^{2n} - 3^{2n}) \\ &= a_n + 8 \cdot (3 \cdot 5^{2n} - 3^{2n}) \end{aligned}$$

Damit ist a_{n+1} durch 8 teilbar, da der erste Summand nach Induktionsvoraussetzung durch 8 teilbar ist und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 8 ist.

- (4) Behauptung: $a_n := 3^n - 1$ ist für alle geraden natürlichen Zahlen n durch 4 teilbar.

Beweis:

(IA) Für $n_0 = 2$ ist $a_2 = 3^2 - 1 = 8$ durch 4 teilbar.

(IV) Für beliebiges gerades $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := 3^n - 1$ durch 4 teilbar.

(IS) Man berechnet $a_{n+2} := 3^{n+2} - 1 = 3^2 \cdot 3^n - 1 = 9 \cdot 3^n - 1 = 8 \cdot 3^n + 3^n - 1 = 4 \cdot 2 \cdot 3^n + a_n$. Der zweite Summand ist nach Induktionsvoraussetzung durch 4 teilbar, der erste Summand ist ein Vielfaches von 4 und damit ebenfalls durch 4 teilbar.

Man beachte folgende Besonderheit bei Beispiel (4): Der Induktionsschritt erfolgt hier nicht von n zu $n+1$, sondern von n zu $n+2$, da $n+1$ ungerade wäre. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist die Behauptung aber falsch, womit die ungeraden natürlichen Zahlen beim Induktionsbeweis zu „überspringen“ sind. Der Beweis weicht also etwas von der bekannten Form ab. Formal kann man den Beweis aber z.B. wieder wie folgt in das übliche Schema pressen, wozu die Indexverschiebung $I: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $I(n) := 2n$ benutzt wird:

- (4*) Behauptung: $a_n := 3^{I(n)} - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar.

Beweis:

(IA) Für $n_0 = 1$ ist $a_1 = 3^{I(1)} - 1 = 3^2 - 1 = 8$ durch 4 teilbar.

(IV) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := 3^{I(n)} - 1$ durch 4 teilbar.

(IS) Man berechnet

$$a_{n+1} := 3^{I(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2n} - 1 = 9 \cdot 3^{I(n)} - 1 = 8 \cdot 3^{I(n)} + 3^{I(n)} - 1 = 4 \cdot 2 \cdot 3^{I(n)} + a_n.$$

Die restliche Argumentation erfolgt wie oben.