

Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

Definition des Funktionsgrenzwertes:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man schreibt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, falls für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Die Zahl $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen a .

Weitere Grenzwertdefinitionen:

- $\lim_{x \searrow a} f(x) = c$ bedeutet: Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. In diesem Fall heißt $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ rechtsseitiger Grenzwert der Funktion f für x gegen a . Andere Schreibweisen sind $\lim_{x \downarrow a} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c$ oder auch $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = c$.
- $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$ bedeutet: Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. In diesem Fall heißt $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ linksseitiger Grenzwert der Funktion f für x gegen a . Andere Schreibweisen sind $\lim_{x \uparrow a} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c$ oder auch $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = c$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ bedeutet: Der Definitionsbereich D ist nach oben unbeschränkt und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Analog ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ definiert.

Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte (Auswahl):

- Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Falls die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =: f^*$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =: g^*$ existieren, dann gilt:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f^* \pm g^*$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f^* \cdot g^*$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f^*}{g^*} \quad (\text{falls } g^* \neq 0)$
- Seien $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in D_g$ ein Punkt, wobei $D_g \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$ gelte. Falls die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =: g^*$ und $\lim_{x \rightarrow g^*} f(x) =: f^*$ existieren, dann gilt für die verkettete Funktion $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f^*.$$
- Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Falls f beschränkt ist und
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

Definition der Stetigkeit von Funktionen:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt stetig in $a \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gilt. Die Funktion f heißt stetig in D , falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Bemerkungen:

- Stetigkeit von f in $a \in D$ bedeutet, dass f in a sowohl links- als auch rechtsseitig stetig ist und es gilt $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$.

- Gehört ein Punkt a nicht zum Definitionsbereich von f und gilt $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) =: c$, so sagt man, dass f im Punkt a stetig ergänzbar ist, nämlich durch $f(a) = c$.

Stetigkeitsätze (Auswahl):

- $\varepsilon - \delta$ -Kriterium: f heißt genau dann stetig in $a \in D$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt.
- Folgenkriterium: f heißt genau dann stetig in $a \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.
- Zwischenwertsatz (allgemeine Fassung): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ [bzw. $f(a) > f(b)$]. Dann existiert zu jedem $c \in (f(a), f(b))$ [bzw. $c \in (f(b), f(a))$] ein $p \in (a, b)$ mit $f(p) = c$.
- Zwischenwertsatz (Spezialfall als „Nullstellensatz“): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ [bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$]. Dann existiert ein $p \in (a, b)$ mit $f(p) = 0$.
- Maximum- und Minimum einer stetigen Funktion: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existiert eine reelle Zahl $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und es existieren $p, q \in [a, b]$ mit $f(p) = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und $f(q) = \inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Definition der gleichmäßigen Stetigkeit von Funktionen:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig in D , wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt.

Bemerkungen:

- Beim $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit darf δ von ε und von a abhängen. Bei der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit wird die Abhängigkeit von a aufgegeben, d.h. δ darf nur noch von ε abhängen. Gleichmäßige Stetigkeit ist also eine Verschärfung der Stetigkeit.
- Anschaulich bedeutet gleichmäßige Stetigkeit, dass es im gesamten Definitionsbereich D *keine* Punkte gibt, in deren Umgebung der Anstieg der Funktion beliebig groß wird.
- Eine gleichmäßig stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt $x \in D$ stetig. Die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen für beliebige Definitionsbereiche nicht. Man kann aber zeigen, dass jede auf einem abgeschlossenen Intervall $D := [a, b]$ stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ auch gleichmäßig stetig ist.

Literatur:

Alle hier gegebenen Definitionen sowie insbesondere auch die Beweise der angegebenen Aussagen sind in jedem guten Analysis-Lehrbuch zu finden. Im Rahmen dieser Vorlesung ist dabei zum Beispiel

- Kreußler, B.; Pfister, G.: *Mathematik für Informatiker. Algebra, Analysis, diskrete Strukturen.*, eXamen.press., Springer, Berlin 2009
- Hartmann, P.: *Mathematik für Informatiker*, Vieweg, Wiesbaden 2004.

zu empfehlen. Darüber hinausgehende Informationen erhält man zum Beispiel in

- Forster, O.: *Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Vieweg, Wiesbaden 2001
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, Stuttgart 2009
- Walter, W.: *Analysis I*, Springer, Berlin 2004

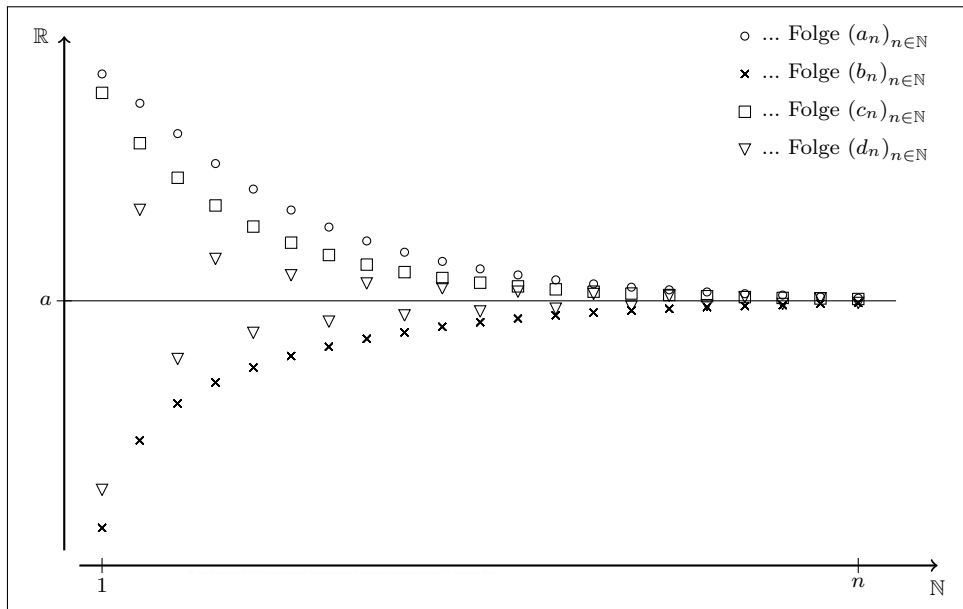


Abb. 1: Einige beliebig gewählte Folgen mit Grenzwert a

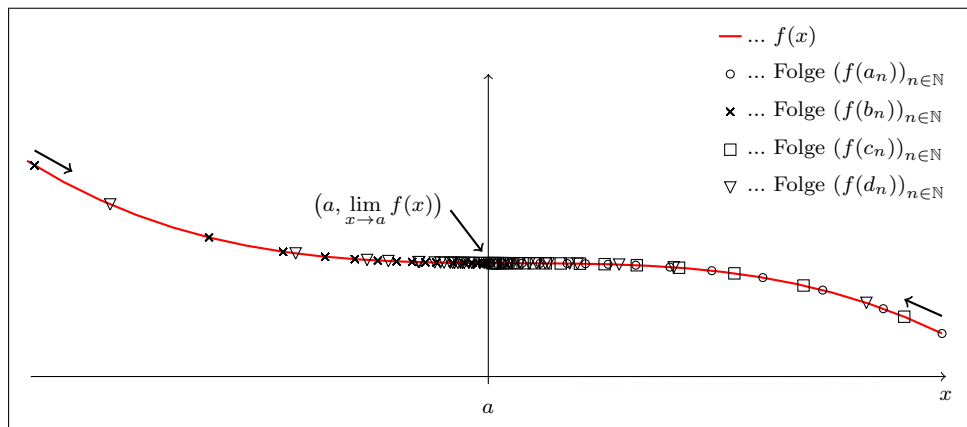


Abb. 2: Funktionsgrenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bei einer im Punkt a stetigen Funktion f .

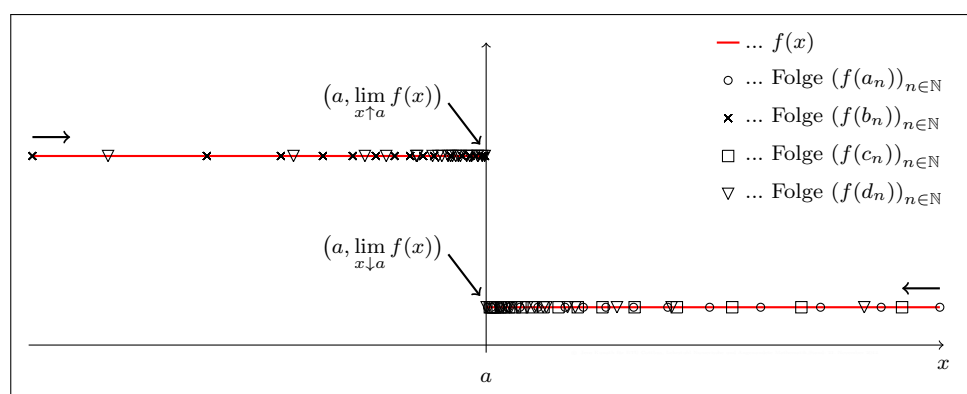


Abb. 3: Links- und rechtsseitiger Funktionsgrenzwert bei einer im Punkt a unstetigen Funktion f .

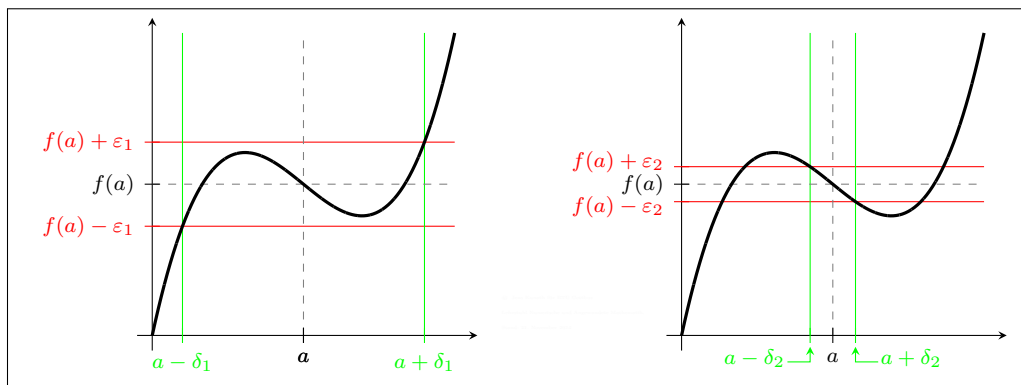


Abb. 4: Veranschaulichung des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit: Wird ε verkleinert, dann muss in der Regel auch δ verkleinert werden, hier verdeutlicht an einem Polynom dritten Grades, wo aus $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ notwendig $\delta_2 < \delta_1$ folgt, um die Stetigkeit im Punkt a nachzuweisen.

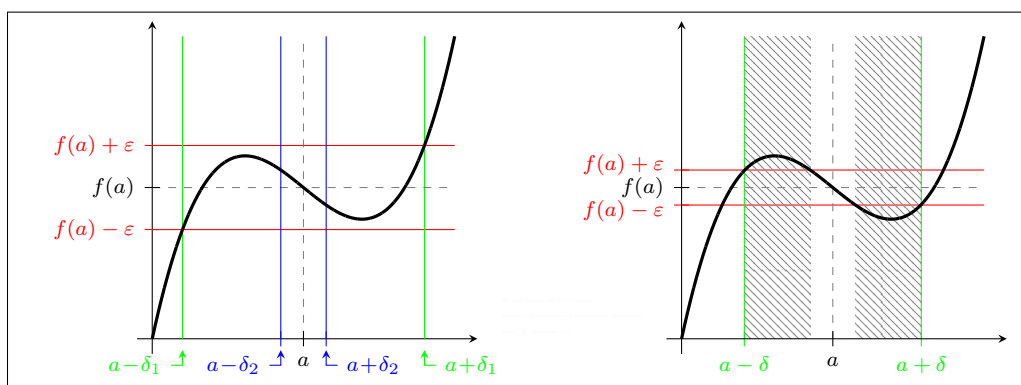


Abb. 5: Veranschaulichung des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit: Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ ist $\delta > 0$ allgemein nicht eindeutig bestimmt, wie der linke Teil der Abbildung illustriert. Sowohl für alle $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$, als auch für alle $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2)$ gilt jeweils $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ bzw. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Andererseits darf $\delta > 0$ auch nicht zu groß gewählt werden, wie der rechte Teil der Abbildung zeigt, wo für alle x aus den grau schraffierten Teilintervallen gilt $f(x) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ bzw. $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.