

Umkehrfunktionen

Definition:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt umkehrbar, wenn f bijektiv ist, d.h. zu jedem $y \in f(D)$ gibt es ein $x \in D$ mit $y = f(x)$ [Surjektivität von f] und für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$ (und umgekehrt) [Injektivität von f]. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ ordnet jedem $y \in f(D)$ genau das $x \in D$ zu, für welches $y = f(x)$ gilt. Dabei ist $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ der Wertebereich von f .

Bemerkungen:

- Eine Funktion, deren Umkehrfunktion existiert, wird auch als invertierbar bezeichnet.
- Vorsicht! Die Bezeichnung $f^{-1}(x)$ ist nicht mit der Funktion $\frac{1}{f(x)}$ zu verwechseln!
- Anschaulich erkennt man die Umkehrbarkeit einer Funktion f daran, dass jede Parallele zur x -Achse den Graph von f höchstens einmal schneidet.
- Ist f bijektiv, dann bedeutet dies: Verschiedenen Elementen des Definitionsbereichs sind stets auch verschiedene Elemente des Wertebereichs $f(D)$ zugeordnet. Die Funktion f ist dann umkehrbar.
- Ist f nicht bijektiv, dann bedeutet dies: Zwei oder mehr Elementen des Definitionsbereichs D einer Funktion f ist ein und dasselbe Element des Wertebereichs $f(D)$ zugeordnet. Dann ist die Funktion nicht umkehrbar.
- Die Umkehrfunktion f^{-1} bzw. ihren Graphen erhält man anschaulich dadurch, indem man f an der Geraden $g(x) = x$ spiegelt.

Kriterium für Umkehrbarkeit:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf D differenzierbar. Ist f auf D streng monoton fallend (d.h. es gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$) oder streng monoton steigend (d.h. es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$), dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$. Die Funktion f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.

Berechnung von Umkehrfunktionen:

Nur in speziellen Fällen ist es möglich, die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ zu berechnen, in dem die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufgelöst wird. Beispiele:

- $y = f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$
- $y = f(x) = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y}$ für $x \in (1, \infty), y \in (0, \infty)$
- $y = f(x) = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \ln \sqrt{y+1}$ für $x \in \mathbb{R}, y \in (-1, \infty)$

In vielen Fällen läßt sich $x = f^{-1}(y)$ nur für Einzelwerte berechnen. Beispiel: $y = f(x) = x \cdot e^x$ ist umkehrbar für $x > -1$, ihre Umkehrfunktion läßt sich nicht berechnen, da die Gleichung $y = f(x)$ nicht nach x aufgelöst werden kann.

Ableitung der Umkehrfunktion:

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ die Umkehrfunktion von f . Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Funktion $f : D \rightarrow W$	Definitionsbereich D	Wertebereich W	Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$
$y = f(x) = ax, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x = f^{-1}(y) = \frac{y}{a}$
$y = f(x) = x^2$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
$y = f(x) = x^2$	$(-\infty, 0]$	$[0, \infty)$	$x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$
$y = f(x) = x^k, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$x = f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$
$y = f(x) = \frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$	$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$
$y = f(x) = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$
$y = f(x) = e^x = \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$x = f^{-1}(y) = \ln(y)$
$y = f(x) = a^x = \exp(x \cdot \ln(a)), \quad a > 0$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$x = f^{-1}(y) = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$
$y = f(x) = \cos(x)$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$x = f^{-1}(y) = \arccos(y)$
$y = f(x) = \sin(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$	$x = f^{-1}(y) = \arcsin(y)$
$y = f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	$x = f^{-1}(y) = \arctan(y)$

Tabelle 1: Zusammenstellung einiger Funktionen und ihrer Umkehrfunktion.

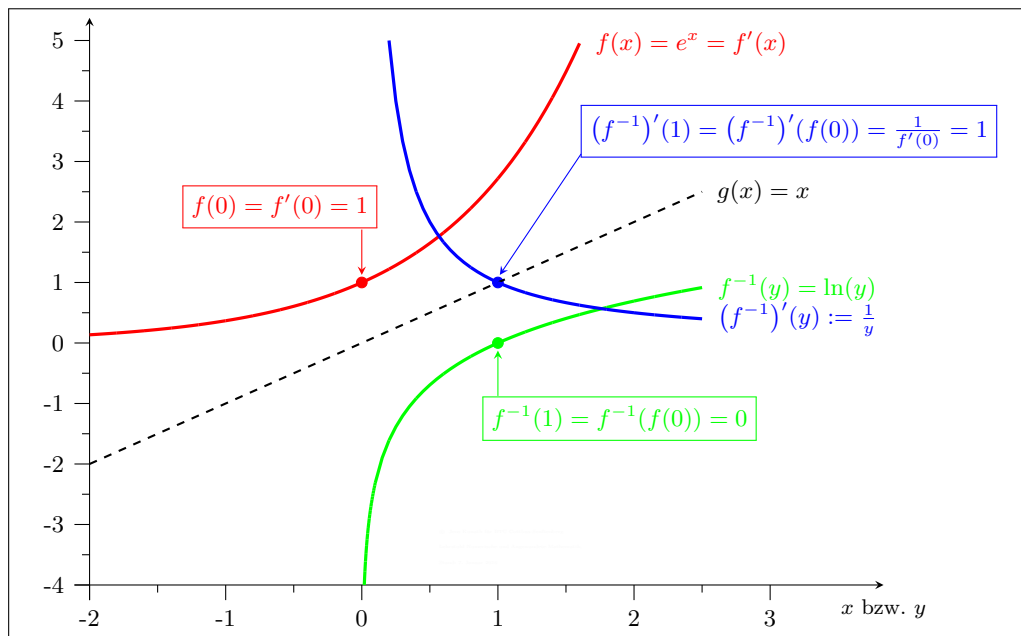


Abb. 1: Die streng monoton steigende Funktion $f(x) = e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \ln(y)$ wird anschaulich durch Spiegelung von f an der Geraden $g(x) = x$ erhalten. Die Zusammenhänge zwischen f , ihrer Umkehrfunktion f^{-1} und deren Ableitung $(f^{-1})'$ sind beispielhaft für $x = 0$ angegeben.

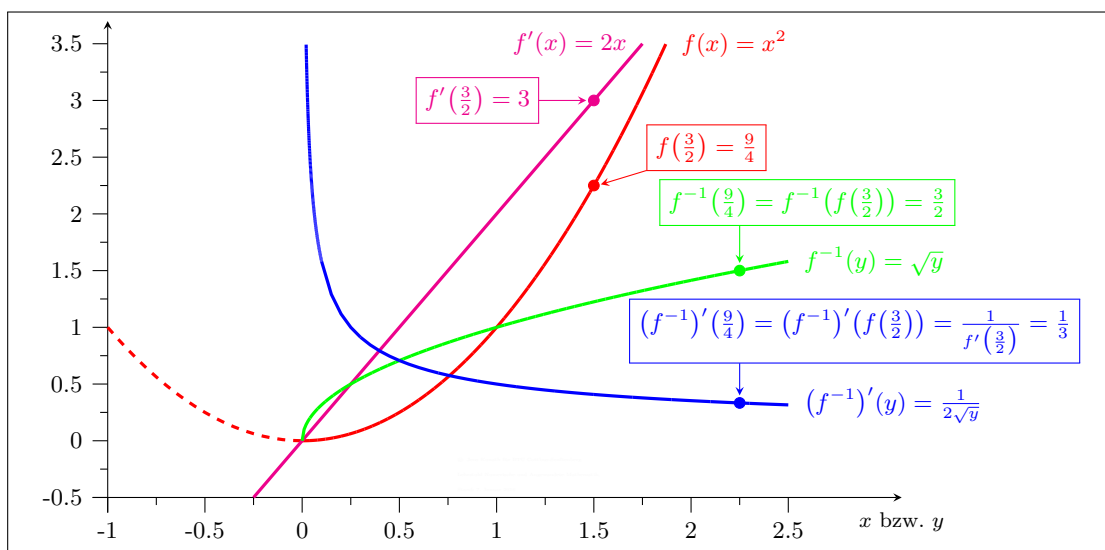


Abb. 2: Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht bijektiv und damit nicht umkehrbar. Wird die Funktion aber nur auf $R_{\geq 0} = [0, \infty)$ betrachtet (hier: —), so ist $f(x) = x^2$ auf $R_{\geq 0}$ bijektiv und damit umkehrbar. Die Zusammenhänge zwischen f (definiert auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$), der Ableitung f' , ihrer Umkehrfunktion f^{-1} und deren Ableitung $(f^{-1})'$ sind beispielhaft für $x = \frac{3}{2}$ angegeben.

Literatur:

Die Beweise der hier angegebenen Aussagen sind zum Beispiel in folgendem Lehrbuch zu finden:

- Forster, O.: *Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Vieweg, Wiesbaden 2001