Hinweise zur Lösung von Ungleichungen

Gegeben sei eine Ungleichung vom Typ

$$f(x) \otimes g(x) \ ,$$

wobei $\otimes$ für ein beliebiges Relationszeichen steht, d.h.

$$\otimes \ \in \ \{ < \ , \ > \ , \ \leq \ , \ \geq \ , \ = \} \ ,$$

und die Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ seien Funktionen, die durch eine Komposition und/oder Verkettung von ganzrationalen Funktion (Polynome), (un)echt gebrochenrationalen Funktionen und/oder Betragsfunktionen definiert werden.

Lösungsschritte:

- **Schritt 1:** Man bestimme den Defintionsbereich D der Ungleichung, d.h. $D = D_f \cap D_g$.
- **Schritt 2:** Man bestimme die kritischen Punkte der Ungleichung (folgt zum Teil schon aus den Überlegungen zu Schritt 1). Das sind bei den *hier* betrachteten Funktionstypen vor allem Nullstellen des Nennerpolynoms bei gebrochenrationalen Funktionen (= Defintionslücken) und Nullstellen von Betragsfunktionen.
- **Schritt 3:** Ordne die kritischen Punkte in aufsteigender Reihenfolge, dies seien $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$ mit $n \in \mathbb{N}$. (Falls es keine kritischen Punkte gibt, dann ist $n = 0$.)
- **Schritt 4:** Setze $z_0 := \inf(D)$ und $z_{n+1} := \sup(D)$. (Randpunkte des Definitionsbereichs)
- **Schritt 5 - Fallunterscheidung:**
  Für alle $i = 0, 1, \ldots, n$ führe die folgenden Teilschritte durch („Fall $i+1$“):
  (a) Falls $z_i \in D$ und $i < n$, dann setze $I := \big[z_i, z_{i+1}\big)$.
  Falls $z_i \notin D$ und $i < n$, dann setze $I := \big(z_i, z_{i+1}\big)$.
  Falls $i = n$, $z_n \in D$ und $z_{n+1} \in D$, dann setze $I := \big[z_n, z_{n+1}\big]$.
  Falls $i = n$, $z_n \in D$ und $z_{n+1} \notin D$, dann setze $I := \big[z_n, z_{n+1}\big)$.
  Falls $i = n$, $z_n \notin D$ und $z_{n+1} \in D$, dann setze $I := \big(z_n, z_{n+1}\big]$.
  Falls $i = n$, $z_n \notin D$ und $z_{n+1} \notin D$, dann setze $I := \big(z_n, z_{n+1}\big)$.

  (b) Für alle $x \in I$ überführe die Ungleichung $f(x) \otimes g(x)$ durch *zulässige* Umformungen in eine Ungleichung des Typs

  $$h(x) \oslash 0 \ ,$$

  wobei $\oslash$ für ein Relationszeichen steht, dass abhängig von den durchgeführten Umformungsschritten entweder von $\otimes$ verschieden ist oder mit $\otimes$ identisch. Man beachte dabei unter anderem:
  - Auflösung von Beträgen: Ist z.B. p ein Polynom und gilt $p(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann folgt $|p(x)| = -p(x)$. Gilt dagegen $p(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, dann folgt $|p(x)| = p(x)$.
  - Multiplikation mit negativen Ausdrücken ändert das Relationszeichen, d.h. aus „$<$“ wird „$>$“ und umgekehrt!

  Tipp: Wenn möglich so umformen, dass h ein Polynom ist.

  (c) Bestimme die Nullstellen von h, d.h. löse die Gleichung $h(x) = 0$ (bei Polynomen z.B. mit Hilfe von: „$p-q$-Formel“, Polynomdivision, binomische Formeln, ...) und ordne diese in aufsteigender Reihenfolge. Falls h Nullstellen besitzt, dann seien diese mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $m \in \mathbb{N}$, bezeichnet. Setze $x_0 := -\infty$ und $x_{m+1} := +\infty$.

  (d) Falls $\oslash \in \{ \leq \ , \ \geq \ , \ = \}$, dann setze

  $$L_{i+1} := \big\{x_1, x_2, \ldots, x_m\big\} \cap I \ ,$$

  und andernfalls $L_{i+1} := \emptyset$.

(e) Falls $\oslash \in \{ <, >, \leq, \geq \}$, dann definiere für jedes $j = 0, 1, \ldots, m$

$$A_j := (x_j, x_{j+1}) \cap I ,$$

und falls $A_j \neq \emptyset$, dann überprüfe, ob $h(x) \oslash 0$ für alle $x \in A_j$ erfüllt ist. Falls ja, dann setze

$$L_{i+1} := L_{i+1} \cup A_j .$$

- **Schritt 6:** Die Lösungsmenge der Ungleichung $f(x) \otimes g(x)$ ist

$$L := L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_{n+1} .$$

Bemerkungen:

- In Schritt 5 (e) genügt es, die Gültigkeit der Ungleichung $h(x) \oslash 0$ für alle $x \in A_j$ wie folgt zu überprüfen: Man wähle ein beliebiges $x \in A_j$ aus und bestimme das Vorzeichen des Funktionswertes $h(x)$. Dann ist das Vorzeichen mit dem Relationszeichen $\oslash$ zu vergleichen. Berechnet man dabei zum Beispiel $h(x) < 0$ und ist $\oslash \in \{ <, \leq \}$, dann ist die Ungleichung $h(x) \oslash 0$ für alle $x \in A_j$ offenbar erfüllt. Gleiches gilt, wenn man $h(x) > 0$ berechnet und es ist $\oslash \in \{ >, \geq \}$.
- Die Teilschritte (d) und (e) in Schritt 5 lassen sich ggf. auch zusammenfassen (siehe die nachfolgenden Beispiele). Die bei der Formulierung des Algorithmus gewählte Variante soll mittels Schritt 5 (e) ausdrücklich daran erinnern, dass für $\otimes \in \{ \leq, \geq, = \}$ das Gleichheitszeichen bei der Lösung von Ungleichungen nicht vergessen wird (was aber leider immer wieder eine beliebte Fehlerquelle ist).

Beispiel 1: Es ist die Ungleichung

$$f(x) = x^2 + 5x + 1 \geq -x^2 + x + 1 = g(x)$$

zu lösen. Offenbar ist $D = \mathbb{R}$, und es gibt keine kritischen Punkte. Wir erhalten

$$h(x) = 2x^2 + 4x = 2x(x+2) \geq 0.$$

Die Gleichung $h(x) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$, die wegen des Relationszeichens „$\geq$“ zugleich auch Lösungen der Ungleichung sind. Wegen $h(-3) = 6 > 0$, $h(-1) = -2 < 0$ und $h(1) = 6 > 0$ folgt als Lösungsmenge der Ungleichung

$$L = \{x_1, x_2\} \cup (x_0, x_1) \cup (x_2, x_3) = (-\infty, -2] \cup [0, \infty) .$$

Beispiel 2: Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$f(x) = x - \sqrt{2} < -\frac{1}{x + \sqrt{2}} = g(x) .$$

Offenbar ist $D_f = \mathbb{R}$ und $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\}$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\}$. Der einzige kritische Punkt ist die Definitionslücke $z_1 = -\sqrt{2}$ von g. Damit haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1: Für $x \in I = (-\infty, -\sqrt{2})$ gilt $x + \sqrt{2} < 0$, so dass Multiplikation der Ungleichung mit $x + \sqrt{2}$ zunächst

$$x^2 - 2 > -1$$

ergibt, woraus

$$h(x) \;=\; x^2 - 1 \;>\; 0$$

folgt. Die Funktion h hat die beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Wegen $A_1 = (-1,1) \cap I = \emptyset$ und $A_2 = (1,\infty) \cap I = \emptyset$, müssen wir nur die Menge $A_0 = (-\infty,-1) \cap I = I$ näher betrachten, und berechnen zum Beispiel $h(-2) = 3 > 0$, woraus nach Vergleich mit dem Relationszeichen „>“ der Ungleichung

$$L_1 \;=\; A_0 \;=\; \big(-\infty, -\sqrt{2}\big)$$

folgt.

- Fall 2: Für $x \in I = \big(-\sqrt{2}, \infty\big)$ gilt $x + \sqrt{2} > 0$, so dass Multiplikation der Ungleichung mit $x + \sqrt{2}$ zunächst

$$x^2 - 2 < -1$$

ergibt, woraus

$$h(x) \;=\; x^2 - 1 \;<\; 0$$

folgt. Bereits aus Fall 1 sind die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ von h bekannt, und nach obigen Algorithmus sind die Mengen $A_0 = (-\infty,-1) \cap I = (-\sqrt{2},-1)$, $A_1 = (-1,1) \cap I = (-1,1)$ und $A_2 = (1,\infty) \cap I = (1,\infty)$ zu betrachten. Aus jeder Menge A_i wählen wir ein Element aus und berechnen den Funktionswert $h(x)$, also zum Beispiel $h(-2) = 3 > 0$, $h(0) = -1 < 0$ und $h(2) = 3 > 0$. Nach Vergleich mit dem Relationszeichen „<“ der Ungleichung $h(x) < 0$ folgt

$$L_2 \;=\; A_1 \;=\; \big(-1, 1\big)$$

als Lösungsmenge von Fall 2.

Wir erhalten insgesamt

$$L \;=\; L_1 \cup L_2 \;=\; \big(-\infty, -\sqrt{2}\big) \cup \big(-1, 1\big)\,.$$

Beispiel 3: Zu lösen ist die Ungleichung

$$f(x) \;=\; |4x - 1| \;\;\geq\;\; x^2 - 4 \;=\; g(x)\,.$$

Es ist $D = \mathbb{R}$ und der einzige kritische Punkt ist $z_1 = \frac{1}{4}$, d.h. es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1: Für $x \in I = \big(-\infty, \frac{1}{4}\big)$ gilt $4x - 1 < 0$, weswegen die Ungleichung äquivalent ist zu

$$-(4x-1) \;\geq\; x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x) = x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5) \;\leq\; 0\,.$$

Die Gleichung $h(x) = 0$ ist erfüllt für $x_1 = -5$ und $x_2 = 1$, wobei aber $x_2 = 1$ wegen der Fallbedingung $x < \frac{1}{4}$ keine Lösung der Ungleichung ist. Weiter genügt es wegen der Fallbedingung, die nichtleeren Intervalle $A_0 = (\infty,-5) \cap I$ und $A_1 = \big(-5, 1\big) \cap I$ zu betrachten, denn $A_3 = (1,\infty) \cap I = \emptyset$. Man berechnet $h(-6) = 7 >$ und $h(0) = -5 < 0$, und nach Vergleich mit dem Relationszeichen „$\leq$“ folgt

$$L_1 \;=\; \big\{x_1\big\} \cup A_1 \;=\; \big[-5, \tfrac{1}{4}\big).$$

- Fall 2: Für $x \in I = \big[\frac{1}{4}, \infty\big)$ gilt $4x - 1 \geq 0$, weswegen die Ungleichung äquivalent ist zu

$$4x - 1 \;\geq\; x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x) = x^2 - 4x - 3 \;\leq\; 0\,.$$

Die Nullstellen von h sind $x_1 = 2 - \sqrt{7} \approx -0.6458$ und $x_2 = 2 + \sqrt{7} \approx 4.6458$. Davon ist wegen der Fallbedingung $x \geq \frac{1}{4}$ aber nur $x_2 = 2 + \sqrt{7}$ eine Lösung der Ungleichung. Wegen der Fallbedingung genügt es außerdem, die nichtleeren Intervalle $A_1 = (2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}) \cap I$ und $A_2 = (2 + \sqrt{7}, \infty) \cap I$ zu betrachten. Wir berechnen zum Beispiel $h(1) = -6 < 0$ und $h(5) = 2 > 0$, und nach Vergleich mit dem Relationszeichen „$\leq$“ folgt

$$L_2 \;=\; \big\{2 + \sqrt{7}\big\} \cup A_1 \;=\; \big[\tfrac{1}{4}, 2 + \sqrt{7}\big].$$

Insgesamt erhalten wir

$$L \;=\; L_1 \cup L_2 \;=\; \big[-5, 2+\sqrt{7}\big] \,.$$

Beispiel 4: Es ist die Ungleichung

$$f(x) \;=\; \frac{|4x-1|}{x^2-4} \;\;\geq\;\; 1 \;=\; g(x)$$

zu lösen. Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Als kritische Punkte ermittelt man $z_1 = -2, z_2 = \frac{1}{4}$ und $z_3 = 2$, womit wir vier Fälle zu unterscheiden haben:

- Fall 1: Für $x \in I = \big(-\infty, -2\big)$ gilt $4x - 1 < 0$ und $x^2 - 4 > 0$. Damit ist die Ungleichung äquivalent zu

  $$-(4x-1) \;\geq\; x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x) = x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5) \leq 0 \,.$$

  Die Funktion h hat die Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 1$, wovon wegen $x < -2$ nur $x_1 = -5$ eine Lösung der Ungleichung ist. Nach obigem Algorithmus genügt es die nichtleeren Intervalle $A_0 = (-\infty, -5) \cap I$ und $A_1 = (-5, 1) \cap I$ zu betrachten, während $A_2 = (1, \infty) \cap I = \emptyset$ keinen Beitrag zur Lösungsmenge bringt. Man berechnet zum Beispiel $h(-6) = 7 > 0$ und $h(0) = -5 < 0$, und nach Vergleich mit dem Relationszeichen „$\leq$“ folgt

  $$L_1 \;=\; \{-5\} \cup A_1 \;=\; [-5, -2) \,.$$

- Fall 2: Für $x \in I = \big(-2, \frac{1}{4}\big)$ gilt $4x - 1 < 0$ und $x^2 - 4 < 0$, womit die Ungleichung äquivalent ist zu

  $$-(4x-1) \;\leq\; x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x) = x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5) \geq 0 \,.$$

  Die Nullstellen von h sind schon aus Fall 1 bekannt, ebenso $h(0) < 0$. Nach Vergleich mit dem Relationszeichen „$\geq$“ und wegen

  $$(-\infty, -5) \cap I = \emptyset \qquad \text{und} \qquad (1, \infty) \cap I = \emptyset$$

  folgt als Lösungsmenge von Fall 2

  $$L_2 \;=\; \emptyset.$$

- Fall 3: Für $x \in I = \big[\frac{1}{4}, 2\big)$ gilt $4x - 1 \geq 0$ und $x^2 - 4 < 0$, womit die Ungleichung äquivalent ist zu

  $$4x - 1 \;\leq\; x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x) = x^2 - 4x - 3 \geq 0 \,.$$

  Die Gleichung $h(x) = 0$ ist erfüllt für $x_1 = 2 - \sqrt{7} \approx -0.6458$ und $x_2 = 2 + \sqrt{7} \approx 4.6458$. Wegen der Fallbedingung müssen die Intervalle $(-\infty, 2-\sqrt{7})$ und $(2+\sqrt{7}, \infty)$ nicht näher untersucht werden. Wegen $h(1) = -6 < 0$ und nach Vergleich mit dem Relationszeichen „$\geq$“ folgt

  $$L_3 \;=\; \emptyset \,.$$

- Fall 4: Für $x \in I = \big(2, \infty\big)$ gilt $4x - 1 > 0$ und $x^2 - 4 > 0$, womit die Ungleichung äquivalent ist zu

  $$4x - 1 \;\geq\; x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x) = x^2 - 4x - 3 \leq 0 \,.$$

  Die Nullstellen von h sind schon aus Fall 3 bekannt und wegen der Fallbedingung genügt es, die Intervalle $(2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7})$ und $(2 + \sqrt{7}, \infty)$ zu betrachten. Wir berechnen zum Beispiel $h(3) = -3 < 0$ und $h(5) = 2 > 0$, und nach Vergleich mit dem Relationszeichen „$\leq$“ folgt

  $$L_4 \;=\; \big[2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}\big] \cap I \;=\; \big(2, 2 + \sqrt{7}\big] \,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$L \;=\; L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \;=\; [-5, -2) \cup \big(2, 2 + \sqrt{7}\big] \,.$$

Bemerkung:

Der Algorithmus kann auch als Grundgerüst für Wurzelungleichungen verwendet werden, wie zum Beispiel Ungleichungen der Bauart

$$\sqrt[n]{f(x)} \otimes g(x)\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ ,\ \ \otimes\ \in\ \{\, <\ ,\ >\ ,\ \leq\ ,\ \geq\ ,\ =\ \}\ .$$

Hier ist in den Teilschritten von Schritt 5 aber etwas mehr Sorgfalt gefragt, denn zum Beispiel das oft in Teilschritt (b) naheliegende Potenzieren der Ungleichung ist nur dann eine zulässig (äquivalente) Umformung, wenn beide Seiten der Ungleichung positiv sind. Selbst wenn es im Sinne des obigen Algoritmus keine kritischen Punkte geben sollte, so kann trotzdem Fallunterscheidung notwendig werden. Anderseits können natürlich auch nach obigen Prinzip bestimmte Fälle in einen oder mehrere Unterfälle zerfallen. Das folgende Beispiel soll einen kleinen Eindruck dazu geben:

Beispiel 4: Es ist die Ungleichung

$$\sqrt{x+1} < x$$

zu lösen. Es ist $D = [-1, \infty)$ und im Sinne des obigen Algorithmus gibt es keine kritischen Punkte. Trotzdem müssen hier zwei Fälle unterschieden werden:

- Fall 1: Es gilt $x \in [-1, 0]$. Dann gilt $\sqrt{x+1} > 0$ und $x < 0$, d.h. $\sqrt{x+1} < x$ ist ein Widerspruch, woraus $L_1 = \emptyset$ folgt.
- Fall 2: Es gilt $x > 0$. Dann sind beide Seiten der Ungleichung positiv, womit Quadrieren eine zulässige äquivalente Termumforumg darstellt, d.h. für $x > 0$ ist die Ungleichung äquivalent zu

  $$x + 1 < x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad h(x) = x^2 - x - 1 > 0\ .$$

  Die Funktion h hat die Nullstellen $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ und $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Es sind die Vorzeichen von h in den Intervallen $A_1 = \big(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)$ und $A_2 = \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\big)$ zu bestimmen. Da h eine nach oben geöffnete Parabel mit zwei Nullstellen ist, folgt hier $h(x) < 0$ für alle $x \in A_1$ und $h(x) > 0$ für alle $x \in A_2$, also $L_2 = A_2$.

Insgesamt erhalten wir $L = L_1 \cup L_2 = \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\big)$.