BTU Cottbus Sommersemester 2012
B. Martin, H. Süß, J. Kunath

Klausur IT-2

30.07.2012

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte:							

Hinweise: Ansätze sind anzugeben, Rechenwege müssen nachvollziehbar sein, Behauptungen sind zu begründen! Als Hilfsmittel sind erlaubt: ein (nicht-programmierbarer) Taschenrechner, ein A4-Blatt mit eigenen handschriftlichen Notizen.

Aufgabe 1: *8 Punkte*

Geben Sie eine kurze exakte Antwort:

(a) Wann hat ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in Mat(m, n; K)$ und $\mathbf{b} \in K^m$, keine Lösung bzw. mehrere Lösungen?

(b) Was ist ein Eigenwert einer linearen Abbildung $f : V \longrightarrow V$? Geben Sie ein Beispiel für ein f ohne (reellen) Eigenwert!

(c) Unter welcher Bedingung ist die Gleichung $6x \equiv a \mod n$, $(a, n \in \mathbb{Z},\ n > 1)$ für $x \in \mathbb{Z}$ lösbar? Wann ist die Lösung eindeutig?

(d) Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sei Null. Was können Sie bzgl. ihre linearen Abhängigkeit/Unabhängigkeit aussagen?

Aufgabe 2: *8 Punkte*

Lösen Sie (a) oder (b):

(a) Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und seien $f(\mathbf{a})$ und $f(\mathbf{b})$ in W linear unabhängig.
Zeigen Sie: Dann sind auch $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ linear unabhängig. *Zusatz: Gilt die Umkehrung?*

(b) Gegeben sind zwei Matrizen $C, D \in Mat(n, n; K)$ und $\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in K^n$.
Zeigen Sie: Ist $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(C, \mathbf{b}) \cap \mathcal{L}(D, \mathbf{b})$, dann gilt $det(C - D) = 0$.

Aufgabe 3: *8 Punkte*

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: *8 Punkte*

Bestimmen Sie zu der Drehmatrix B die Drehachse und eine ON-Basis des orthogonalen Komplementes der Drehachse.

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{2}$$

Aufgabe 5: *8 Punkte*

Notieren Sie die reduzierte Zeilenstufenform der Matrix $(C, \mathbf{b})$, sowie die Basislösungen des zugehörigen homogenen und eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems.

$$(C, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: *8 Punkte*

Stellen Sie den ggT von $a = 108$ und $b = 330$ als Summe von Vielfachen von a und b dar.
Finden Sie alle Lösungen der Kongruenzgleichung $108x \equiv 36 \mod 330$.