Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Klausur am 05. August 2013

Name : ______________________________

Matrikelnummer : ______________________________

Studiengang : ______________________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	10	25	11	14	60	5	3	-
erreichte Punkte								

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Sommersemester 2013) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 6 bis 8** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- **Bitte nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe schreiben!**
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Menge mit $n \geq 2$ Elementen und $\circ : G \times G \to G$ eine Verknüpfung. Die Existenz eines inversen Elements $a^{-1} \in G$ für alle $a \in G$ erkennt man in der Verknüpfungstafel

$$\begin{array}{c|ccc} \circ & \ldots & a_j & \ldots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ a_i & \ldots & a_i \circ a_j & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

daran, dass ein neutrales Element existiert und

☐ (a) die Verknüpfungstafel symmetrisch ist.

☐ (b) in jeder Zeile und jeder Spalte die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ genau einmal vorkommen.

☐ (c) $a_i \circ a_i =: e$ für alle $i = 1, \ldots, n$ den gleichen Wert $e \in G$ ergibt.

☐ (d) keine der vorgenannten Alternativen (a), (b) oder (c) zutrifft.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

☐ (a) Ist $(G, \circ)$ eine endliche zyklische Gruppe, dann ist $(G, \circ)$ kommutativ.

☐ (b) Jede kommutative Gruppe $(G, \circ)$ ist zyklisch.

☐ (c) Ist $a \in G$ das erzeugende Element einer endlichen zyklischen Gruppe $(G, \circ)$ der Ordnung n, so hat die Gleichung $a^{8n-3} \circ x = e$ die Lösung $x = a^3$, wobei e das neutrale Element ist und a^k die k-fache Verknüpfung von a mit sich selbst.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien u, v und w drei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. U, V bzw. W seien die linearen Hüllen dieser Vektoren, also $U = \text{span}\{u\}$, $V = \text{span}\{v\}$ und $W = \text{span}\{w\}$. Es gilt:

☐ (a) $\text{span}\big(U \cup V \cup W\big) = \mathbb{R}^3$

☐ (b) $\text{span}\big((U \cap V) \cup W\big) = \mathbb{R}^3$

☐ (c) $\text{span}\big(U \cup (V \cap W)\big) = \mathbb{R}^3$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper ($n \in \mathbb{N}$) und $f : V \to V$ mit $f(x) = Ax$ sei eine lineare Abbildung, wobei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Die Abbildung f ist genau dann bijektiv, falls

☐ (a) der Zeilenraum von A die Dimension $n - 1$ hat.

☐ (b) A invertierbar ist.

☐ (c) $n > 1$ gilt und A symmetrisch ist.

☐ (d) keine der genannten Alternativen (a), (b) oder (c) zutrifft.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, und die Vektoren v_1, v_2 bilden eine Basis des Kerns $\ker(f)$. Für die Dimension des Bildes $\operatorname{im}(f)$ gilt dann

- ☐ (a) $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$
- ☐ (b) $\dim(\operatorname{im}(f)) = 3$
- ☐ (c) $\dim(\operatorname{im}(f)) = 4$

Aufgabe 6 (25 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1800 und 1275.

(c) Ermitteln Sie die multiplikative Inverse $[10]^{-1}$ zur Restklasse $[10]$ im Körper $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

(d) Berechnen Sie den Wert von $(3+5^4)\cdot(3-5^4)+3^5$ im Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(e) Es sei $K := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. In K werde für alle $(a,b), (c,d) \in K$ folgende Addition und Multiplikation definiert:

$$(a,b) + (c,d) \; := \; (a+c, b+d) \qquad \text{und} \qquad (a,b)\cdot(c,d) \; := \; (ac+2bd, ad+bc)$$

Man kann zeigen, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist. Führen Sie diesen Beweis auszugsweise, d.h. bestimmen Sie bezüglich der Multiplikation das neutrale Element sowie die multiplikativen Inversen, und verifizieren Sie das Distributivgesetz. (*Hinweis: Beachten Sie, dass das Inverse $(a,b)^{-1}$ zu (a,b) ggf. von a und b abhängen kann.*)

(f) Gegeben seien $f, g \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2x^9 + 2x^7 + 2x^6 + x^3 + x^2 + 2$ und $g(x) = x^3 + 2x + 2$. Bestimmen Sie Polynome $q, r \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ mit $f = q \cdot g + r$.

(g) Ist die durch $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit $f\big((a,b,c,d)^T\big) := (a-b)x^3 + (b-c)x^2 + dx + a$ definierte Abbildung eine lineare Abbildung?

(h) Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

lösbar? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A,b)$ und geben Sie diese in der Form $\mathcal{L}(A,b) = x_p + \ker(A)$ an, wobei x_p eine beliebige, aber feste Lösung des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems ist.

Aufgabe 7 (11 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinante von $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(b) Berechnen Sie die Inverse B^{-1} von $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

Aufgabe 8 (14 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} .$$

Es seien $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$, $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ und $U + V = \operatorname{span}(U \cup V)$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von U,

(b) sowie eine Basis von $U + V$.

(c) Ergänzen Sie die Basis von $U + V$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

(d) Geben Sie die Dimensionen von U, V, $U + V$ und $U \cap V$ an.

(e) Für welche Werte $s, t \in \mathbb{R}$ liegt der Vektor $w = \big(4\ ,\ -2\ ,\ s\ ,\ t - 29\ ,\ 2t - s\big)^T$ in $U + V$?

Verwenden Sie in (a), (b), (c) und (e) ausschließlich den Gauß-Algorithmus!

(*Hinweis: Zur Reduzierung des Rechenaufwandes führen Sie die Rechungen von (b) und (c) parallel durch.*)