Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Klausur am 17. Februar 2014

Name : ______________________

Matrikelnummer : ______________________

Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	10	29	11	11	61	5	3	-
erreichte Punkte								

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Sommersemester 2013) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 6 bis 8** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- **Bitte nicht mit Bleistift und nicht in Rot schreiben!**
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Menge mit $n \geq 2$ Elementen und $\circ : G \times G \to G$ eine Verknüpfung. Die Gültigkeit des Kommutativgesetztes $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ erkennt man in der Verküpfungstafel

$$\begin{array}{c|ccc} \circ & \ldots & a_j & \ldots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ a_i & \ldots & a_i \circ a_j & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

daran, dass

- ☐ (a) die Tafel symmetrisch ist.
- ☐ (b) in jeder Zeile und jeder Spalte die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ genau einmal vorkommen.
- ☐ (c) $a_i \circ a_i =: e$ für alle $i = 1, \ldots, n$ den gleichen Wert $e \in G$ ergibt.
- ☐ (d) keine der vorgenannten Alternativen (a), (b) oder (c) zutrifft.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- ☐ (a) Gilt $\mathrm{rg}(A) = n$, so ist A invertierbar und das Gleichungssystem $Ax = b$ hat für beliebiges $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x = A^{-1}b$.
- ☐ (b) Gilt $\mathrm{rg}(A) = n$, so ist A invertierbar und das Gleichungssystem $Ax = b$ hat für beliebiges $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x = bA^{-1}$.
- ☐ (c) Gilt $\mathrm{rg}(A) < n$, so hat das Gleichungssystem $Ax = b$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}^n$ nur dann eine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) - \mathrm{rg}(A|b) = 0$, wobei $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien u, v und w drei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Außerdem seien $z = 3u - 8v + w$, $U = \mathrm{span}\{u\}$, $V = \mathrm{span}\{v\}$, $W = \mathrm{span}\{w\}$ und $Z = \mathrm{span}\{z\}$. Es gilt:

- ☐ (a) $\mathrm{span}\big(U \cup W \cup Z\big) = \mathbb{R}^3$
- ☐ (b) $\mathrm{span}\big((U \cap V) \cup Z\big) = \mathbb{R}^3$
- ☐ (c) $\mathrm{span}\big(V \cup (W \cap Z)\big) = \mathbb{R}^3$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei λ ein Eigenwert einer regulären Matrix A. Ein Eigenwert der Matrix $B := A^2$ ist dann

- ☐ (a) 2λ
- ☐ (b) λ^2
- ☐ (c) $\dfrac{1}{\lambda^2}$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, und die Vektoren v_1, v_2 bilden eine Basis des Kerns $\ker(f)$. Bezeichnet $\operatorname{im}(f)$ den Bildraum von f, dann gilt:

- ☐ (a) $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$ und f ist surjektiv
- ☐ (b) $\dim(\operatorname{im}(f)) = 4$ und f ist surjektiv
- ☐ (c) $\dim(\operatorname{im}(f)) = 4$ und f ist nicht surjektiv

Aufgabe 6 (29 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $a_n := 2n^3 + 3n^2 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

(b) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1600 und 515.

(c) Ermitteln Sie die multiplikative Inverse $[8]^{-1}$ zur Restklasse $[8]$ im Körper $\mathbb{Z}/43\mathbb{Z}$.

(d) Warum ist die Menge $M = \{e, a, b, c, d\}$ mit der durch die folgende Tafel gegebene Verknüpfung keine Gruppe?

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	e	b
d	d	b	c	a	e

(e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Für welche Werte von $w \in \mathbb{R}$ ist das System unlösbar bzw. lösbar? Bestimmen Sie für den Fall der Lösbarkeit die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$, und stellen Sie diese in der Form $\mathcal{L}(A, b) = x_p + \ker(A)$ dar, wobei x_p eine beliebige, aber feste Lösung des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems ist.

(g) Für alle Polynome $g \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ vom Grad kleiner gleich zwei, d.h. also der Gestalt $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, sei die Abbildung $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(g) := \begin{pmatrix} g(1) \\ g(2) \end{pmatrix}$$

Weisen Sie nach, dass f eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1\ ,\ 1 - x\ ,\ 1 + x^2\}$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und der Basis $\mathcal{D} = \{(1, -1)^T\ ,\ (0, 1)^T\}$ des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie außerdem die notwenigen Rechenschritte an, um $f(p)$ für $p(x) = x^2 + x + 1$ mit Hilfe der Abbildungsmatrix zu berechnen.

Aufgabe 7 (11 Punkte)

Sei $\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \subset \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich drei. Folgende Polynome $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ seien gegeben:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 - 4x^2 + 4x + 4 \\ p_2(x) &= -x^3 - x^2 - 9x + 1 \\ p_3(x) &= 3x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \\ p_4(x) &= x^3 + 4x - 1 \end{aligned}$$

(a) Welche Dimension hat die lineare Hülle $U = \operatorname{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$?

(b) Berechnen Sie eine Basis von U.

(c) Ergänzen Sie die Basis von U zu einer Basis von $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(d) Für welche Werte $s, t \in \mathbb{R}$ liegt $w(x) := 3 \cdot x^3 + (2+t) \cdot x^2 + (s + 3t + 4) \cdot x + 2t - s$ in U? Geben Sie für diese Werte an, mit welcher Linearkombination der Basiselemente von U das Polynom w erhalten wird.

Aufgabe 8 (11 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinante von $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(b) Berechnen Sie die Inverse B^{-1} von $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$