Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Testklausur vom 19.06.2013

Name : ____________________

Matrikelnummer : ____________________

Übungsgruppe : ____________________

Aufgabe(n)	1 bis 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$	Note	Zusatzpkt. f. d. Prüfung
mögliche Punkte	6	2	2	3	4	6	5	3	5	4	40	-	5
erreichte Punkte													

Hinweise: In den Ankreuzfragen 1 bis 3 gibt es *genau eine* richtige Antwort. Kreuzen Sie in den Aufgaben 1 bis 3 jeweils die richtige Antworten an. Für angekreuzte, aber falsche Antworten werden keine negativen Punkte vergeben. Bei den Aufgaben 4 bis 12 muss jede Lösung klar begründet und der Lösungsweg nachvollziehbar angegeben werden. Außer den Vorlesungsmitschriften und einer Formelsammlung sind keine Hilfsmittel erlaubt!
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Gegeben sei $f_k := 2^k \bmod 4$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

☐ (a) $f_k = 2$ für gerade k und $f_k = 0$ für ungerade k

☐ (b) $f_k = 0$ für alle $k \geq 2$.

☐ (c) $f_k = 0$ für alle k.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen bzgl. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist falsch?

☐ (a) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement.

☐ (b) Es gelten die Distributivgesetze, d.h. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

☐ (c) Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ existiert ein Inverses bzgl. der Addition.

☐ (d) Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ existiert ein Inverses bzgl. der Multiplikation.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
$(G, +)$ sei eine Gruppe und $a \in G$ sei vom neutralen Element $e \in G$ verschieden. Dann gilt:

☐ (a) In einer Gruppentafel müssen a und e in jeder Zeile jeweils genau einmal vorkommen.

☐ (b) In einer Gruppentafel muss e in jeder Zeile mindestens einmal vorkommen. Es genügt, wenn a in einer Zeile genau einmal auftritt.

☐ (c) In einer Gruppentafel muss e in jeder Zeile höchstens einmal vorkommen. Es genügt, wenn a in zwei Zeilen auftritt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n}(4k-1) \;=\; 2n^2+n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $n = 23100$ an.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 477 und 366, sowie ganze Zahlen s und t mit $\operatorname{ggT}(477, 366) = s \cdot 477 + t \cdot 366$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie $(8 \cdot 7 + 3 \cdot 9^3)^3$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

(b) Berechnen Sie $(x^2 + 3x) \cdot (x + 4) + 5x + 2$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Gegeben seien die beiden Mengen $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\}$ und $B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\}$. Untersuchen Sie, ob diese Mengen jeweils zusammen mit der Verknüpfung

$$(a, b) \circ (c, d) := (ac\ ,\ ad + bc)$$

eine Gruppe bilden, und ob diese ggf. kommutativ ist.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass $R := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen ein Ring ist.

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Zeigen Sie, dass $U := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq n\}$ ein Untervektorraum des Vektorraums der reellen Polynome ist.

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad y := \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad z := \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} .$$

aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig bzw. linear abhängig? Welche Dimension hat im Fall der linearen Abhängigkeit der Untervektorraum $U = \operatorname{span}(x, y, z)$, welche der drei Vektoren bilden eine Basis von U?

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind?

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $f\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) := \big(x_4, 1, 0, x_1\big)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\big((x, y)\big) := \big(x\ ,\ 2x + 5y\big)$