Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Testklausur vom 19.06.2013

Name : ____________________

Matrikelnummer : ____________________

Übungsgruppe : ____________________

Aufgabe(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 bis 12	$\sum$	Note	Zusatzpkt. f. d. Prüfung
mögliche Punkte	5	6	2	2	3	4	4	5	3	6	40	-	5
erreichte Punkte													

Hinweise: Bei den Aufgaben 1 bis 9 muss jede Lösung klar begründet und der Lösungsweg nachvollziehbar angegeben werden. In den Ankreuzfragen 10 bis 12 gibt es *genau eine* richtige Antwort. Kreuzen Sie in den Aufgaben 10 bis 12 jeweils die richtige Antworten an. Für angekreuzte, aber falsche Antworten werden keine negativen Punkte vergeben. Außer den Vorlesungsmitschriften und einer Formelsammlung sind keine Hilfsmittel erlaubt! **Bearbeitungszeit: 60 Minuten**

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad z := \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ t+4 \end{pmatrix} .$$

aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig bzw. linear abhängig? Welche Dimension hat im Fall der linearen Abhängigkeit der Untervektorraum $U = \operatorname{span}(x, y, z)$, welche der drei Vektoren bilden eine Basis von U?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben seien die beiden Mengen $A = \big\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\big\}$ und $B = \big\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\big\}$. Untersuchen Sie, ob diese Mengen jeweils zusammen mit der Verknüpfung

$$(a, b) \circ (c, d) := (ad + bc\ ,\ bd)$$

eine Gruppe bilden, und ob diese ggf. kommutativ ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \;=\; 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $n = 195000$ an.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 452 und 219, sowie ganze Zahlen s und t mit $\operatorname{ggT}(452, 219) = s \cdot 452 + t \cdot 219$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\quad (11 \cdot 18 + 10 \cdot 11^3)^4 \quad$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

(b) Berechnen Sie $\quad (x^2 + 4x) \cdot (x + 3) + (4x + 1)^2 \quad$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind?

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) := \big(x_1 + x_4, x_2 + x_3, 0\big)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\big((x, y)\big) := \big(2x + y\ ,\ x\big) + (1, 1)$

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass $R := \big\{a - b\sqrt{2} \bigm| a, b \in \mathbb{Z}\big\}$ mit der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen ein Ring ist.

Aufgabe 9 (3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \bmod 2 = 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$U := \big\{f \in \mathbb{R}[x] \bigm| \deg(f) = n,\ f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_j = 0 \text{ für } j \bmod 2 = 0\big\}$$

ein Untervektorraum des Vektorraums der reellen Polynome ist.

Aufgabe 10 (2 Punkte)
Gegeben sei $f_k := 2^k \bmod 8$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- ☐ (a) $\quad f_k = 4$ für ungerade k und $f_k = 0$ für gerade k
- ☐ (b) $\quad f_k = 0$ für alle k.
- ☐ (c) $\quad f_k = 0$ für alle $k \geq 3$.

Aufgabe 11 (2 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen bzgl. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist falsch?

- ☐ (a) $\quad (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement.
- ☐ (b) $\quad$ Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ existiert ein Inverses bzgl. der Addition.
- ☐ (c) $\quad$ Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$ existiert ein Inverses bzgl. der Multiplikation.
- ☐ (d) $\quad$ Die Gleichung $x^2 - 1 = 1$ ist in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \cdot)$ lösbar.

Aufgabe 12 (2 Punkte)
$(G, \circ)$ sei eine kommutative Gruppe und $a \in G$ sei vom neutralen Element $e \in G$ verschieden. Dann gilt:

- ☐ (a) $\quad$ In einer Gruppentafel müssen a und e in jeder Zeile genau einmal vorkommen und es gilt $a \circ a = e$.
- ☐ (b) $\quad$ In einer Gruppentafel muss e in jeder Zeile höchstens einmal vorkommen. Es genügt, wenn a in zwei Zeilen auftritt.
- ☐ (c) $\quad$ In einer Gruppentafel müssen a und e in jeder Spalte jeweils genau einmal vorkommen.