Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Testklausur vom 19.06.2013

Name : ____________________

Matrikelnummer : ____________________

Übungsgruppe : ____________________

Aufgabe(n)	1 bis 3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$	Note	Zusatzpkt. f. d. Prüfung
mögliche Punkte	6	6	5	3	4	7	4	5	40	-	5
erreichte Punkte											

Hinweise: In den Ankreuzfragen 1 bis 3 gibt es *genau eine* richtige Antwort. Kreuzen Sie in den Aufgaben 1 bis 3 jeweils die richtige Antworten an. Für angekreuzte, aber falsche Antworten werden keine negativen Punkte vergeben. Bei den Aufgaben 4 bis 10 muss jede Lösung klar begründet und der Lösungsweg nachvollziehbar angegeben werden. Außer den Vorlesungsmitschriften und einer Formelsammlung sind keine Hilfsmittel erlaubt!
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Gegeben sei $f_k := 2^k \bmod 6$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

☐ (a) $f_k = 2$ für ungerade k und $f_k = 4$ für gerade k

☐ (b) $f_k = 2$ für alle $k \geq 3$.

☐ (c) $f_k = 2$ für alle k.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen bzgl. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist falsch?

☐ (a) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement.

☐ (b) Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ existiert ein Inverses bzgl. der Addition.

☐ (c) Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ existiert ein Inverses bzgl. der Multiplikation.

☐ (d) Die Gleichung $x^2 - 1 = 1$ ist in $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \cdot)$ lösbar.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
$(G, +)$ sei eine Gruppe und $a \in G$ sei vom neutralen Element $e \in G$ verschieden. Dann gilt:

☐ (a) In einer Gruppentafel müssen a und e in jeder Spalte genau einmal vorkommen und es gilt $a \circ a = e$.

☐ (b) In einer Gruppentafel müssen a und e in jeder Zeile jeweils genau einmal vorkommen.

☐ (c) In einer Gruppentafel muss e in jeder Zeile mindestens einmal vorkommen. Es genügt, wenn a in einer Zeile genau einmal auftritt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben seien die beiden Mengen $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\big\}$ und $B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\big\}$. Untersuchen Sie, ob diese Mengen jeweils zusammen mit der Verknüpfung

$$(x,y) \circ (u,v) := (xu\ ,\ yu + xv)$$

eine Gruppe bilden, und ob diese ggf. kommutativ ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad z := \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ t+1 \end{pmatrix} .$$

aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig bzw. linear abhängig? Welche Dimension hat im Fall der linearen Abhängigkeit der Untervektorraum $U = \operatorname{span}(x,y,z)$, welche der drei Vektoren bilden eine Basis von U?

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass $U := \Big\{f \in \mathbb{R}[x] \ \Big|\ \deg(f) \bmod n = 0\Big\}$ ein Untervektorraum des Vektorraums der reellen Polynome ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind?

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $f\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) := \big(x_4, x_3, x_2, x_1\big)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\big((x,y)\big) := \big(3x + 2y\ ,\ x + 1\big)$

Aufgabe 8 (7 Punkte)

(a) Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $n = 24480$ an.

(b) Beweisen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 376 und 104, sowie ganze Zahlen s und t mit $\operatorname{ggT}(376, 104) = s \cdot 376 + t \cdot 104$.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie $(16 \cdot 12 + 13 \cdot 11^4)^2$ in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

(b) Berechnen Sie $(x^2 + 3x) \cdot (x + 2) + (5x + 1)^2$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass $R := \big\{a\sqrt{3} + b \ \big|\ a, b \in \mathbb{Z}\big\}$ mit der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen ein Ring ist.