Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Klausur am 15. Februar 2011

Name : ______________________

Matrikelnummer : ______________________

Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$	Bonus	Note
mögliche Punkte	12	4	6	5	7	7	6	3	5	55	3	-
erreichte Punkte												

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Deratige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 6** mit □-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 7 bis 14** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit!
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Gegeben Sei die Menge $M := \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n+2}{3^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$. Welche Aussage ist für M richtig?

☐ (a) M besitzt das Infimum $\inf(M) = -1$ und das Supremum $\sup(M) = 1$. Wegen $-1 \notin M$, besitzt M aber kein Minimum. Wegen $1 \in M$ hat M das Maximum $\max(M) = 1$.

☐ (b) M besitzt das Infimum $\inf(M) = -1$ und das Supremum $\sup(M) = \frac{3}{9}$. Wegen $-1 \in M$, besitzt M das Minimum $\min(M) = -1$. Wegen $\frac{3}{9} \in M$ hat M das Maximum $\max(M) = \frac{3}{9}$.

☐ (c) M besitzt das Infimum $\inf(M) = -1$ und das Supremum $\sup(M) = \frac{4}{9}$. Wegen $-1 \in M$, besitzt M das Minimum $\min(M) = -1$. Wegen $\frac{4}{9} \in M$ hat M das Maximum $\max(M) = \frac{4}{9}$.

☐ (d) M besitzt das Infimum $\inf(M) = -\infty$ und das Supremum $\sup(M) = \infty$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Es seien $M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^2 = -9 \right\}$ und $M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^6 = 1 \right\}$.

☐ (a) $M_1 = \{-3i, 3i\}$ und $M_2 = \left\{-1, 1, -i, i, \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

☐ (b) $M_1 = \{-3i, 3i\}$ und $M_2 = \left\{-1, 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\}$

☐ (c) M_1 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = 3$ für alle $z \in M_1$ und M_2 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = 1$ für alle $z \in M_2$

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und es gelte $-\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq -\dfrac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

☐ (a) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine alternierende und $\left(|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Eine Aussage über absolute Konvergenz ist nicht möglich.

☐ (b) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine alternierende und $\left(|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Aus den Voraussetzungen folgt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{3}{4} < 1$, woraus zusätzlich die absolute Konvergenz der Reihe folgt.

☐ (c) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine alternierende und $\left(|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergiert. Aus den Voraussetzungen folgt aber $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{3}{4} < 1$, d.h. die Reihe konvergiert absolut.

☐ (d) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine alternierende und $\left(|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $f'(0) < 0$	(ii) $f'(2) > 0$	(iii) $f(1) = -2$
(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$	(v) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$	(vi) $f''(x) > 0$ für $x \in [0, 2]$

Welche Folgerung aus diesen Bedingungen ist zulässig?

☐ (a) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0,2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p = 1$ ein lokales Minimum besitzt.

☐ (b) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0,2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0,2)$ ein lokales Maximum besitzt.

☐ (c) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0,2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0,2)$ ein lokales Minimum besitzt.

☐ (d) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0,2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0,2)$ ein globales Minimum besitzt.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und ungerade Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und gerade Funktion. Sei außerdem $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Welche der folgenden Aussagen folgt aus den Eigenschaften von f und g?

☐ (a) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$, $\int_{-a}^{a} f(g(x))\,dx = 0$ und

$\int_{-a}^{a} g(f(x))\,dx = 2\int_{0}^{a} g(f(x))\,dx$

☐ (b) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$, $\int_{-a}^{a} f(g(x))\,dx = 2\int_{0}^{a} f(g(x))\,dx$ und

$\int_{-a}^{a} g(f(x))\,dx = 0$

☐ (c) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$, $\int_{-a}^{a} f(g(x))\,dx = 2\int_{0}^{a} f(g(x))\,dx$ und

$\int_{-a}^{a} g(f(x))\,dx = 2\int_{0}^{a} g(f(x))\,dx$

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Welche Aussage ist für die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ möglich?

☐ (a) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und deshalb gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

☐ (b) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und deshalb gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

☐ (c) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konstant, d.h. $c_n = c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

☐ (d) Es ist keine Aussage über die Monotonie und Konvergenz der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ möglich.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die $x^3 - x < 0$ gilt.

(b) Ermitteln Sie Supremum und Infimum der Menge $A := \{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0, \;\; x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt{n + 6\sqrt{n}} - \sqrt{n + 4\sqrt{n}}$ für $n \geq 1$ auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für $n \geq 1$ definiert ist durch:

$$b_n := (-1)^n \left(n - 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) \cdot \frac{5n^7 + \cos((2n+1)\pi)}{\sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) - 8n^7}$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{2n-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{5|x|}\right)^n$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, aber *fest* gewählt sei.

Berechnen Sie bei (b) zusätzlich den Grenzwert.

Aufgabe 10 (7 Punkte)

Gegeben seien die reellwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (-\pi, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \\ \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) & , \quad x < 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) := \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos(x)-1}{x} & , \quad x > 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

(a) Ist die Funktion f in $x = 1$ stetig und stetig differenzierbar?

(b) Kann man die Konstante c in der Funktion g so wählen, dass g in $x = 0$ stetig ist?

Aufgabe 11 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f_a(x) := \left(x + \frac{1}{a}\right) \cdot e^{-ax}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Führen Sie für f_a eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema und Koordinaten der Wendepunkte.

(b) Geben Sie eine Gleichung der Funktion $g(x)$ an, auf deren Graph alle Wendepunkte der Kurvenschar f_a liegen.

(c) Der Graph der Funktion f_1 schließt mit der x-Achse und der Geraden $x = 2$ eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Aufgabe 12 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \cos \frac{x^2}{2}\, dx$ durch eine geeignete Substitution.

(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)\sin(x) - \sin(2x)}{\sin^2(x) + \cos(2x)}\, dx$.

Aufgabe 13 (3 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{2x} y$ mit dem Anfangswert $y(1) = a$ durch Trennung der Variablen, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig gewählt werden darf.

Aufgabe 14 (5 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f?