Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Wiederholungsklausur am 27. September 2011

Name : ____________________

Matrikelnummer : ____________________

Studiengang : ____________________

Aufgabe(n)	1 bis 6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$	Bonus	Note
mögliche Punkte	12	7	6	8	7	3	4	5	4	56	3	-
erreichte Punkte												

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 6** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 7 bis 14** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit!
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Gegeben Sei die Menge $M := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$. Welche Aussage ist für M richtig?

☐ (a) $M = \{-1, 1\}$

☐ (b) M besitzt das Infimum $\inf(M) = 1$, das zugleich auch Minimum der Menge M ist.

☐ (c) M besitzt das Infimum $\inf(M) = -1$. Wegen $-1 \notin M$, besitzt M aber kein Minimum.

☐ (d) M ist nach unten unbeschränkt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Es seien $M_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^2 = -3\right\}$ und $M_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^4 = 1\right\}$.

☐ (a) M_1 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = \sqrt{3}$ für alle $z \in M$ und M_2 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = 1$ für alle $z \in M$

☐ (b) $M_1 = \left\{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\right\}$ und $M_2 = \left\{-1, 1, -\sqrt{i}, \sqrt{i}, \right\}$

☐ (c) $M_1 = \left\{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\right\}$ und $M_2 = \{-1, 1, -i, i\}$

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

☐ (a) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n$ konvergiert.

☐ (b) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n$ absolut konvergiert.

☐ (c) Mit dem Quotientenkriterium folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n = 0$.

☐ (d) Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} a_n$ divergiert.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $f'(0) > 0$	(ii) $f'(2) < 0$	(iii) $f(1) = 2$
(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$	(v) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$	(vi) $f''(x) < 0$ für $x \in [0, 2]$

Welche Folgerung aus diesen Bedingungen ist zulässig?

☐ (a) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p = 1$ ein lokales Maximum mit $f(p) = 2$ besitzt.

☐ (b) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0, 2)$ ein lokales Maximum mit $f(p) = 1$ besitzt.

☐ (c) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0, 2)$ ein globales Maximum besitzt.

☐ (d) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0, 2)$ ein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und ungerade Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und gerade Funktion. Sei außerdem $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Welche der folgenden Aussagen folgt aus den Eigenschaften von f und g?

☐ (a) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_0^a g(x)\,dx$, $\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$,

$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\cdot f(x)\,dx$ und $\int_{-a}^{a} g(x)\cdot g(x)\,dx = 2\int_0^a g(x)\cdot g(x)\,dx$

☐ (b) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_0^a g(x)\,dx$, $\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\cdot g(x)\,dx$,

$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot f(x)\,dx = 0$ und $\int_{-a}^{a} g(x)\cdot g(x)\,dx = 0$

☐ (c) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_0^a g(x)\,dx$, $\int_{-a}^{a} f(x)\cdot g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\cdot g(x)\,dx$,

$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\cdot f(x)\,dx$ und $\int_{-a}^{a} g(x)\cdot g(x)\,dx = 2\int_0^a g(x)\cdot g(x)\,dx$

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n| + \frac{1}{4}} < \frac{3}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was läßt sich über die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aussagen?

☐ (a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

☐ (b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

☐ (c) Es ist keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ möglich.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. deren Häufungswerte bzw. Grenzwerte.

(a) $a_n := n^2\left(\sqrt{n^4+5} - \sqrt{n^2-4}\sqrt{n^2+4}\right)$.

(b) $b_n := \dfrac{(n^2-3)^2}{2n^4+7n-12}$

(c) $c_n := \left(n + 3\left\lfloor -\frac{n}{3}\right\rfloor\right) \cdot \frac{3n}{5n+8}$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot e^{-n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{7^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^n$

Berechnen Sie bei (b) zusätzlich den Grenzwert.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

- $f(x) := (\ln(x+3))^a$ für $x \in (-3, \infty), a \in \mathbb{R}$
- $g(x) := x \cdot \exp(\sin(x))$

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte nach den Regeln von l'Hospital:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{\ln(x)}$

(*Hinweis zu (b): Es gilt* $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$ *für alle* $y \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 10 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty)$ mit $f(x) := \frac{\ln(x)+1}{x}$.

(a) Führen Sie für f eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema und Koordinaten der Wendepunkte.

(b) Der Graph der Funktion f schließt im Intervall $\left[e, e^2\right]$ mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.
(*Hinweis: Verwenden Sie bei der Ermittlung einer Stammfunktion von f eine geeignete Substitution.*)

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^2 \sin(x)\, dx$ durch partielle Integration.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y(1+x^2)y' = (1+y^2)x$ mit dem Anfangswert $y(1) = 3$, wobei $y > 0$ sei.

Aufgabe 13 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierreihe $p(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ für die 2π-periodische Funktion

$$f(x) \ := \ \begin{cases} x & , \quad x \in [0,\pi] \\ \pi & , \quad x \in [\pi, 2\pi) \end{cases} .$$

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der durch $f(x,y) = x \cdot y \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ definierten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie außerdem die kritischen Punkte des Gradienten ∇f, d.h. alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla f(x,y) = 0$.