Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Klausur am 14. Februar 2012

Name : ______________________________

Matrikelnummer : ______________________________

Studiengang : ______________________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$	Bonus	Note
mögliche Punkte	10	11	7	7	6	7	6	4	4	62	3	-
erreichte Punkte												

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2011/12) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Deratige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich! In den vorgesehenen Feldern** ▒▒▒ **tragen Sie bitte außerdem die entsprechenden Werte ein, falls Sie das entsprechende Kästchen ankreuzen.**
- In den **Aufgaben 6 bis 13** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Die Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ sei beschränkt und die Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ sei abzählbar unendlich. Was läßt sich über die Menge $C := A \cap B$ aussagen?

☐ (a) C ist endlich.

☐ (b) C ist nicht endlich.

☐ (c) Es ist keine Aussage über die Endlichkeit von C möglich.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Gegeben Sei die Menge $M := \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^3 \geq 8 \right\}$. Welche der folgenden Aussagen ist für M richtig?

☐ (a) M besitzt das endliche Infimum $\inf(M) = \boxed{}$, aber kein Minimum.

☐ (b) Es gilt $\min(M) = \inf(M) = \boxed{}$.

☐ (c) M besitzt das endliche Supremum $\sup(M) = \boxed{}$, aber kein Maxmimum.

☐ (d) Es gilt $\max(M) = \sup(M) = \boxed{}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Es seien $M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^7 = \exp(iz \cdot \ln(3)) \right\}$ und $M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^7 = 3 \right\}$. Behauptung: „Es existieren Elemente $z_1 \in M_1$ und $z_2 \in M_2$, so dass $z_2 < z_1$ gilt.“

☐ (a) Die Behauptung ist falsch, da keine Elemente $z_1 \in M_1$ und $z_2 \in M_2$ mit $z_2 < z_1$ existieren.

☐ (b) Die Behauptung ist falsch, da für alle $z_1 \in M_1$ und alle $z_2 \in M_2$ gilt: $z_2 = z_1$.

☐ (c) Die Behauptung ist unzulässig, da es auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation gibt.

☐ (d) Die Behauptung ist unzulässig, da M_1 und M_2 leer sind.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (-\infty, 0]$ (ii) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in [2, \infty)$ (iii) $f(1) = -2$

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ (v) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ (vi) $f''(x) > 0$ für $x \in [0, 2]$

Welche Folgerung aus diesen Bedingungen ist zulässig?

☐ (a) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p = 1$ ein lokales Minimum besitzt. Die Funktion besitzt außerdem in den Intervallen $(-\infty, 0]$ und $[2, \infty)$ jeweils mindestens einen Wendepunkt.

☐ (b) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p = 1$ ein globales Minimum besitzt. Die Funktion besitzt außerdem in den Intervallen $(-\infty, 0]$ und $[2, \infty)$ jeweils genau einen Wendepunkt.

☐ (c) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0, 2)$ ein globales Minimum besitzt. Die Funktion besitzt außerdem in den Intervallen $(-\infty, 0]$ und $[2, \infty)$ jeweils genau einen Wendepunkt.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und stetig differenzierbare Funktion. Der Zwischenwertsatz (in der Variante als Nullstellensatz) besagt: Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $f(c) = 0$. Für welche der folgenden Funktionenklassen folgt stets die Eindeutigkeit des Punktes $c \in (a,b)$ (unabhängig von weiteren, nicht bekannten Eigenschaften der Funktion f)?

☐ (a) Für jede beliebige stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

☐ (b) Für keine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

☐ (c) Für jede stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, für die $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

☐ (d) Für jede stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, für die $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Aufgabe 6 (11 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{5n^2+8n+3}{12n^2-n-22} \cdot \dfrac{7n^3}{22-12n^3} \cdot \dfrac{(n+1)^2-2}{(n-1)^2+2}$.

(b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \left(5n - 25\left\lfloor \dfrac{n}{5} \right\rfloor\right) \cdot \dfrac{3n^7-1}{(-1)^n - 8n^7}$.

(c) Ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-6\sqrt{n}}$ konvergent?

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist die Folge $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$.

(b) Weisen Sie mit Hilfe des Leibnizkriteriums nach, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n^2+1}$ konvergiert.

(c) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{3}}\right)^{n^2}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2\sqrt{x} - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{12}{x} & \text{für } x > 4 \end{cases}$ definiert.

(a) Untersuchen Sie die Funktion f an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ auf Stetigkeit.

(b) Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regeln von l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(x^7\right)}{\ln\left(x^3\right)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2}$

Aufgabe 10 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\ln(x)+1}{x}$.

(a) Führen Sie für f eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema und Koordinaten der Wendepunkte.

(b) Der Graph der Funktion f schließt im Intervall $\left[e, e^2\right]$ mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.
(*Hinweis: Verwenden Sie bei der Ermittlung einer Stammfunktion von f eine geeignete Substitution.*)

Aufgabe 11 (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie mit partieller Integration eine Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x) := (x^2-2)\cdot e^{3x}$.

(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\sin^2(x)+1}\,dx.$

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = x + xy^2$ mit dem Anfangswert $y(0) = 0$.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5^{2x+1}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f?
(*Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Vermutung für die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) von f auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion! Beweisen Sie insbesondere auch die erste Ableitung $f'(x)$.*)