Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2011/2012

Wiederholungsklausur am 27. September 2012

Name : ______________________

Matrikelnummer : ______________________

Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$	Bonus	Note
mögliche Punkte	10	11	7	7	6	7	6	4	4	62	3	-
erreichte Punkte												

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich! In den vorgesehenen Feldern**   **tragen Sie bitte außerdem die entsprechenden Werte ein, falls Sie das entsprechende Kästchen ankreuzen.**
- In den **Aufgaben 6 bis 13** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit!
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Die Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ seien beschränkt und für alle $b \in B$ gelte $b \neq 0$. Was läßt sich über die Menge $C := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in A, b \in B \right\}$ aussagen?

☐ (a) Die Menge C ist beschränkt.

☐ (b) Die Menge C ist unbeschränkt.

☐ (c) Es ist keine Aussage über die Beschränktheit von C möglich.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben Sei die Menge $M := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Welche Aussage ist für M richtig?

☐ (a) $M = \{-1, 1\}$

☐ (b) M besitzt das Infimum $\inf(M) = 1$, das zugleich auch Minimum der Menge M ist.

☐ (c) M besitzt das Infimum $\inf(M) = -1$. Wegen $-1 \notin M$, besitzt M aber kein Minimum.

☐ (d) M ist nach unten unbeschränkt.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Was versteht man allgemein unter der Konvergenz einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

☐ (a) Die Konvergenz der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

☐ (b) Die Konvergenz der Partialsummenfolge $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right)_{k \in \mathbb{N}}$.

☐ (c) Die Konvergenz der Folge $\left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Für welche der folgenden Funktionenklassen folgt stets die Eindeutigkeit des Punktes $c \in (a, b)$ (unabhängig von weiteren, nicht bekannten Eigenschaften der Funktion f)?

☐ (a) Für jede beliebige stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

☐ (b) Für keine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

☐ (c) Für jede stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

☐ (d) Für jede stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Für die Funktion $f : [-1,1]\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ kann bewiesen werden, dass für alle $x \in [-1,1]\backslash\{0\}$ die Abschätzung $|f(x) - 1| \leq \frac{|x|^2}{3}$ gilt. Welche Schlußfolgerungen sind daraus zu erhalten?

☐ (a) Das $\varepsilon - \delta$-Kriterium der Stetigkeit ist wie folgt erfüllt: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|f(x) - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ mit $|x| < \delta :=$ ____, d.h. f ist in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar mit $f(0) := 1$.

☐ (b) Die Funktion f ist in $x_0 =$ ____ stetig ergänzbar mit $f(x_0) = 1$. Aus der Abschätzung folgt außerdem, dass f im Intervall $[-1,1]$ gleichmäßig stetig ist.

☐ (c) Die Funktion f ist in $x_0 = 0$ unstetig und hat dort den Funktionswert $f(0) =$ ____.

Aufgabe 6 (11 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(3n - 9\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) \cdot \dfrac{(-1)^n n^2}{2n^2 + n + 5}$.

(b) Ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\quad b_n := \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n \quad$ konvergent?

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \dfrac{3n^3 - n^2 + 5n + 1}{7n^3 + n - 2} \cdot \dfrac{3n^7 - n^6 + n^3}{1 - 4n^7} + \dfrac{n+1}{n^2 - 1}$.

(d) Beweisen oder wiederlegen Sie folgende Behauptung: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beliebige Folgen. Weiter seien a bzw. b Häufungpunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit dem Häufungspunkt $a + b$.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n}{(n!)^2}$ auf Konvergenz.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{5|x|}\right)^n$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, aber ***fest*** gewählt sei.

(c) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos(n\pi)}{n}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} e^x - 1 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ definiert.

(a) Untersuchen Sie die Funktion f an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ auf Stetigkeit.

(b) Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\uparrow 0} \dfrac{2e^x - 2}{x}$ mit Hilfe der Regel von l'Hospital.

(b) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{x}$ existiert. Warum kann die Regel von l'Hospital hier nicht angewendet werden?

Aufgabe 10 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2xe^{-2x+1}$.

(a) Führen Sie für f eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der lokalen Extrema und Koordinaten der Wendepunkte.

(b) Der Graph der Funktion f schließt im Intervall $[0, 1]$ mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Aufgabe 11 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie für ***beliebiges*** $t > 1$ das bestimmte Integral $\displaystyle\int_1^t \frac{2\ln(x)}{x}\, dx$.

(b) Berechnen Sie das unbetsimmte Integral $\displaystyle\int \frac{2x\cos(x) - 3x^2\sin(x) - 3\sin(x)}{(x^2+1)\cos(x)}\, dx$.

(Hinweis zu (b): Formen Sie den Integranden zunächst geeignet um!)

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y(1+x^2)y' = (1+y^2)x$ mit dem Anfangswert $y(1) = 3$, wobei $y > 0$ sei.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der durch $f(x,y) = x \cdot y \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ definierten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie außerdem die kritischen Punkte des Gradienten ∇f, d.h. alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla f(x,y) = 0$.