Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Klausur am 19. Februar 2013

Name : ____________________

Matrikelnummer : ____________________

Studiengang : ____________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	10	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	10	10	10	12	10	10	62	5	3	-
erreichte Punkte										

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2012/13) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 6 bis 10** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Die Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ seien beschränkt und für alle $b \in B$ gelte $b \neq 0$. Was läßt sich über die Menge $C := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in A, b \in B \right\}$ aussagen?

☐ (a) Die Menge C ist beschränkt.

☐ (b) Die Menge C ist unbeschränkt.

☐ (c) Es ist keine Aussage über die Beschränktheit von C möglich.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{Q}$ eine nach unten beschränkte Menge. Welche Aussage folgt daraus?

☐ (a) M besitzt ein Minimum in $\mathbb{R}$.

☐ (b) M besitzt ein Minimum in $\mathbb{Q}$.

☐ (c) Das Infimum von M liegt in $\mathbb{R}$.

☐ (d) Das Infimum von M liegt in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

☐ (a) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ konvergiert.

☐ (b) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ divergiert.

☐ (c) Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ konvergiert.

☐ (d) Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ divergiert.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Zahl $a := 1 - 17i$. Welchen Imaginärteil hat $z := a^k \cdot \overline{a}^k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?

☐ (a) $\operatorname{Im}(z) = -289^k$

☐ (b) $\operatorname{Im}(z) = 289^k$

☐ (c) $\operatorname{Im}(z) = 0$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei f eine auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stückweise stetige Funktion mit $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$, für deren Integral $\int_a^b f(x)\,dx = -1$ gilt. Welche der folgenden Aussagen gilt für $\int_a^c f(x)\,dx$, wenn $a < c < b$?

☐ (a) $\int_a^c f(x)\,dx \in [-2,-1]$

☐ (b) $\int_a^c f(x)\,dx \in [-1,0]$

☐ (c) Weil f nur stückweise stetig ist, ist eine Abschätzung von $\int_a^c f(x)\,dx$ nicht möglich.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{3n^8+7n^6-7n}{5n^8+n-1} \cdot \dfrac{1-n^2}{2n^2+1} + \dfrac{n^3+(-1)^n n^2}{2n^3+2n^2-3}$

(b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{(-1)^n n^2+n}{4n^2-8n+4} + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}n\right)$

(c) Ein Fass mit einem maximalem Fassungsvermögen von 100 Liter enthält 20 Liter Wasser und ist porös. Eine Sisyphusarbeit: Karl-Otto rennt mit einem Eimer hin und her und schüttet in Abständen von einer Minute 5 Liter in den Behälter. Leider sickert umso mehr Wasser durch die Löcher, je weiter das Fass bereits gefüllt ist. Während Karl-Otto hin und her läuft verliert das Fass wieder 10% seines eben noch vorhandenen Inhalts. Wird das Fass jemals voll? Falls nicht, wo liegt seine Grenze? Begründen Sie in jedem Fall die Existenz eines Grenzwertes!

Aufgabe 7 (10 Punkte)

(a) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\cos(\pi n)}{\big(\ln(n)\big)^n}$ absolut konvergent?

(b) Weisen sie nach, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(\tfrac{3}{5}, \left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right)$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert!

(c) Sei (a_n) eine beliebige Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie: Wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n\big)^2$. Ist auch die Umkehrung dieser Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(*Hinweis zu (a): Wurzelkriterium; Hinweis zu (b): Es gilt* $0.75^2 = 0.5625$, $0.75^3 = 0.421875$)

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} 2x^2+x+1 & \text{für } x < 0 \\ \exp(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \exp(4-x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ definiert.

(a) Untersuchen Sie die Funktion f an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ auf Stetigkeit.

(b) Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ differenzierbar? Geben Sie die Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.

(c) Weisen Sie nach, dass f zwei lokale Extremwerte besitzt und geben Sie die Art und die Koordinaten der lokalen Extremwerte an.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $f(x) := -8x^2 \cos(x)$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi} \big(\cos(x) + 8x^2 + \sin(-x) + 1\big) \cdot \big(\sin(x) - 16x + \cos(x)\big)\, dx$

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung $\quad 3y' = -2x^2y - 4xy \quad$ mit $y > 0$ und dem Anfangswert $y(1) = 2$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \dfrac{\exp(x^2 - 1) - x^2}{x^{-2} - \exp(1 - x^2)}$. Weisen Sie nach, dass die Funktion f in $x = 1$ stetig ergänzbar ist, indem Sie den Grenzwert $\quad f(1) := \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ berechnen. Geben Sie außerdem den Grenzwert $f(-1) := \lim\limits_{x \to -1} f(x)$ an, ohne diesen zu berechnen (mit Begründung).

(b) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\quad f(x) := e^{-2x} + 2x^2 \quad$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f?