Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2012/2013

Klausur am 26. September 2013

Name : ______________________

Matrikelnummer : ______________________

Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	10	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	10	9	9	17	12	5	62	5	3	-
erreichte Punkte										

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2012/13) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 6 bis 10** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Gegeben sei die Menge $M := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Welche Aussage ist für M richtig?

☐ (a) $M = \{-1, 1\}$

☐ (b) M besitzt das Infimum $\inf(M) = 1$, das zugleich auch Minimum der Menge M ist.

☐ (c) M besitzt das Infimum $\inf(M) = -1$. Wegen $-1 \notin M$, besitzt M aber kein Minimum.

☐ (d) M ist nach unten unbeschränkt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Was folgt daraus für die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \dfrac{a_n}{b_n}$?

☐ (a) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Häufungspunkte -1 und 1.

☐ (b) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ hat $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte.

☐ (c) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat nur den Häufungspunkt 0.

☐ (d) Eine Aussage über die Existenz von Häufungspunkten der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht möglich.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 \leq a_{n+1} \leq \dfrac{10}{11} a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche Aussage bzgl. der Konvergenz ist für die Reihe $R := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ möglich?

☐ (a) Es ist keine Aussage über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe R möglich.

☐ (b) Die Reihe R ist wegen $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \dfrac{10}{11}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ divergent.

☐ (c) Die Reihe R ist wegen $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \dfrac{10}{11}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Was gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C}$ der Ungleichung $|z|^2 < z \cdot \overline{z}$ mit $z \in \mathbb{C}$?

☐ (a) $\mathcal{L}$ ist leer, da auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation definiert ist

☐ (b) $\mathcal{L}$ ist leer, da $|z|^2 \geq z \cdot \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

☐ (c) $\mathcal{L}$ ist leer, da $|z|^2 - z \cdot \overline{z} < 0$ ein Widerspruch ist

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) \neq f(x + \delta)$ und $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

☐ (a) Es gilt $f'(-x) = f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ (b) Es gilt $f'(-x) = f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☐ (c) Es gilt $f'(-x) = -f'(x)$.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{3^n - 2n - 1}{5^n + n^5 + n} + \dfrac{3n^2 + 2n + 1}{1 - n - 7n^2}$.

(b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(\dfrac{(-2)^n + 3}{2^{n+3}}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $b_n \in \mathbb{C}$ zwei Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c \in \mathbb{C}$. Weiter sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ eine Folge, für die ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n| \leq |c_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

(*Hinweis zu (a): Schätzen Sie den ersten Summanden geeignet nach oben ab.*)

Aufgabe 7 (9 Punkte)

(a) Untersuchen Sie mit dem Leibnizkriterium, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(n-1)^2}$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2} - 2}{6^k}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 8}{(n^2)!}$ konvergiert.

Aufgabe 8 (17 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \ln\big(h(x)\big)$, wobei die Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $h(x) := 4 - |2x + 6|$.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie die Nullstellen von f. Ist die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar? Geben Sie die erste Ableitung von f in allen Punkten aus D an, in denen f differenzierbar ist. Bestimmen Sie außerdem durch Diskussion des Monotonieverhaltens von f die Koordinaten und die Art aller lokalen Extremstellen von f.

(b) Bestimmen Sie die Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & , \quad x < 1 \\ -5 & , \quad x = 1 \\ b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 5 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 1$ stetig und differenzierbar ist. Berechnen Sie bzgl. der so bestimmten Konstanten a und b den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

(c) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4^{\frac{2x+4}{x^2}}$ die Koordinaten sowie die Art der lokalen Extrempunkte und untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen.

(*Hinweis zu (a): Falls erforderlich, so können Sie die Tatsache verwenden, dass f auf D stetig ist, ohne dies extra nachzuweisen.*)

Aufgabe 9 (12 Punkte)

(a) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{18x^2}{e^{2x^3+2}}\,dx$ mit der Substitutionsmethode.

(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ mit partieller Integration.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe $2yx + y'x^2 = -2xy' + 3xy + y$ mit $y(2) = 8$.

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \dfrac{1}{2^x}$. Stellen Sie das Taylorpolynom 3. Grades $T_3(x)$ von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ auf und geben Sie das zugehörige Restglied $R_3(x)$ an. Weisen Sie nach, dass für das Restglied die Abschätzung $\left|R_3(x)\right| \leq \frac{1}{400}$ für alle $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ gilt. (*Hinweise: Es gilt* $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ *für alle* $a, b > 0$ *und* $e \approx 2.718281828$.)