Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Klausur am 11. Februar 2014

Name : ______________________________

Matrikelnummer : ______________________________

Studiengang : ______________________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	10	9	8	17	17	61	7	3	-
erreichte Punkte									

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2013/14) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 6 bis 9** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- **Bitte nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe schreiben!**
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Von einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien die ersten 10^5 Glieder bekannt und es gilt $a_{n+1} > a_n > 0$ für alle $1 \leq n < 10^5$. Lassen diese Glieder einen Schluss auf das Konvergenzverhalten der Folge zu?

☐ (a) Ja, denn für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \geq 10^5$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$.

☐ (b) Ja, denn für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq 10^5$.

☐ (c) Nein, da nicht bekannt ist, ob zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n > n_0$.

☐ (d) Nein, da nicht bekannt ist, ob zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < \varepsilon$ für alle $n > 10^5 > n_0$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass es zu jedem $S > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_0}| \geq S$ gibt. Welche Aussage über die Anzahl der Häufungspunkte ist für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ möglich?

☐ (a) Es ist keine Aussage über die Anzahl der Häufungspunkte möglich.

☐ (b) Die Folge hat eine endliche Anzahl von Häufungspunkten.

☐ (c) Die Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

☐ (d) Die Folge hat keine Häufungspunkte.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Was gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C}$ der Ungleichung $|z|^2 < z \cdot \overline{z}$ mit $z \in \mathbb{C}$?

☐ (a) $\mathcal{L}$ ist leer, da auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation definiert ist.

☐ (b) $\mathcal{L}$ ist leer, da $|z|^2 \geq z \cdot \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

☐ (c) $\mathcal{L}$ ist leer, da $|z|^2 - z \cdot \overline{z} < 0$ ein Widerspruch ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist für die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid 1 < x \leq 2\}$ richtig?

☐ (a) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ das Infimum $\inf(M) = 1$ und das Supremum $\sup(M) = 2$.

☐ (b) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kein Infimum, aber das Supremum $\sup(M) = 2$.

☐ (c) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kein Infimum und kein Supremum.

☐ (d) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kein Supremum, aber das Infimum $\inf(M) = 1$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) \neq f(x+\delta)$ und $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

☐ (a) Es gilt $f'(-x) = f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ (b) Es gilt $f'(-x) = f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☐ (c) Es gilt $f'(-x) = -f'(x)$.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n \quad := \quad \frac{8n^2+4n-1}{3n^2-999n+51} \cdot \frac{3(n+1)^2-2(n-1)^2}{7(n+1)(n-1)} \; + \; \frac{3n}{5n+1}$$

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\quad a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+2}}{5^k}$

(c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\quad a_n := \frac{(-1)^n 3n^2 - 2n + (-1)^n}{5n^2 + (-1)^n n} + c_n$,

wobei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $\lim_{k\to\infty} c_{3k} = -\frac{3}{2}$, $\lim_{k\to\infty} c_{3k+1} = \frac{1}{2}$ und $\lim_{k\to\infty} c_{3k+2} = 2$ ist.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-3)^n + (-1)^{n+1}}{4^n+8}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\left(3+(-1)^n\right)^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\sqrt{n}}{(n+2)!}$

Aufgabe 8 (17 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{4}\sin(-\pi x) - \dfrac{1}{2}x & , \quad x \leq \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1-\sqrt{2x}}{\exp(2x-1)-1} & , \quad x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion in $x_0 = \dfrac{1}{2}$ stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \quad x \leq 0 \\ \Big(2 - \big(\cos(\pi x)\big)^2\Big)^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Lage und die Art der lokalen Extremwerte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \left(x^2 - 3x - \frac{3}{2}\right) \cdot \exp(2x)\ .$$

(d) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x \cdot x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f?

Aufgabe 9 (17 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{3}{2}x^2 + 2x - 5\, dx$.

(b) Berechnen Sie mit partieller Integration eine Stammfunktion von $f(x) = e^{2x}\cos(x)\, dx$.

(c) Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{2x^2 + x + 9}{(x^2-1)(x+1)}\, dx$, und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

(d) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dfrac{y'}{\sqrt{2-\cos(x)}} = y\sin(x)$ mit $y > 0$ und dem Anfangswert $y(0) = \exp\left(\frac{3}{2}\right)$. (*Hinweis: Verwenden Sie nach der Trennung der Variablen auf einer Seite bei der Integration eine geeignete Substitution!*)