Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Wiederholungsklausur am 25. September 2014

Name : ______________________
Matrikelnummer : ______________________
Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	10	9	10	17	14	60	7	3	-
erreichte Punkte									

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2013/14) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 5** mit □-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 6 bis 9** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- **Bitte nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe schreiben!**
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Menge. Welche der nachfolgenden Zahlen $K \in \mathbb{R}$ kann allgemein als Schranke für M gewählt werden?

☐ (a) $K = \min\big\{\inf(M)\,,\ \sup(M)\big\}$

☐ (b) $K = \max\big\{\inf(M)\,,\ \sup(M)\big\}$

☐ (c) $K = \max\big\{\big|\inf(M)\big|\,,\ \big|\sup(M)\big|\big\}$

☐ (d) $K = \min\big\{\big|\inf(M)\big|\,,\ \big|\sup(M)\big|\big\}$

☐ (e) $K = \max\big\{\big|\min(M)\big|\,,\ \big|\max(M)\big|\big\}$

☐ (f) $K = \min\big\{\big|\min(M)\big|\,,\ \big|\max(M)\big|\big\}$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

In den Lösungen zu Hausaufgaben vergangener Semester wurde von mehreren Studenten für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n := \dfrac{\big(\cos(n)+\sin(n^8)\big)^n}{e^n 5^n}$ folgendes behauptet: „Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{2}{5e} < 1$ gilt.“ Dieser „Beweis“ ist

☐ (a) richtig.

☐ (b) falsch, da der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nicht existiert.

☐ (c) falsch, da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

☐ (d) falsch, da das Wurzelkriterium hier nicht angewendet werden kann.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Gegeben seien stetige und integrierbare Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die stückweise definierte Funktion

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & , \quad x \in \big(-\infty, x_0\big) \\ h(x) & , \quad x \in \big[x_0, \infty\big) \end{cases}$$

in x_0 unstetig ist. Außerdem sei $G(x)$ bzw. $H(x)$ diejenige Stammfunktion von g bzw. h, die keine konstanten Summanden $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ enthält. Was kann man über die Stetigkeit der stückweise definierten Funktion

$$F(x) := \begin{cases} G(x) & , \quad x \in \big(-\infty, x_0\big) \\ H(x) & , \quad x \in \big[x_0, \infty\big) \end{cases}$$

aussagen?

☐ (a) F ist in x_0 unstetig.

☐ (b) F ist in x_0 stetig.

☐ (c) Es ist keine Aussage zur Stetigkeit von F in x_0 möglich.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Sei f eine auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stückweise stetige Funktion mit $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ für alle $x \in [a,b]$.
Welche der folgenden Aussagen gilt für $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$?

☐ (a) $\sqrt{2}(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \sqrt{3}(b-a)$

☐ (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{b-a} \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \dfrac{\sqrt{3}}{b-a}$

☐ (c) Weil f nur stückweise stetig ist, ist eine Abschätzung von $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ nicht möglich.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Es sei $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^7 = 3 \right\}$.

☐ (a) M ist leer.

☐ (b) M enthält abzählbar unendlich viele Elemente, von denen genau 7 den Betrag $|z| = \sqrt[7]{3}$ haben.

☐ (c) M enthält genau 7 Elemente, die alle den Betrag $|z| = \sqrt[7]{3}$ haben.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n \;:=\; \left(\frac{3(n+1)^3}{2n^3 - 99n^2 - 51n + 89} \cdot \frac{2(n+11)(n-11)}{5n^2 + 8n - 1} \;-\; \frac{7n}{5n-1} \right)^2$$

(b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := \sqrt{2}$ und $a_n := \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ für $n \geq 1$ auf Konvergenz.

(c) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(n + 3 \left\lfloor -\dfrac{n}{3} \right\rfloor \right) \cdot \dfrac{3n}{5n+8}$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{n+1}}{3^n}$.

(b) Weisen Sie nach, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\big(\ln(n+3)\big)^n}$ absolut konvergiert.

(c) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n)!}$ konvergent?

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$ konvergiert.

Aufgabe 8 (17 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos(8x)+1}{\ln\left(e\cdot\frac{x^2}{\pi^2}\right)-1} & , \quad x \in (0,\pi) \\ \cos(x)+1 & , \quad x \in [\pi, 2\pi] \\ x^2 - 4x\pi + 4\pi^2 & , \quad x \in (2\pi, \infty) \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion in den Stellen $x_1 = \pi$ bzw. $x_2 = 2\pi$ stetig ist.

(b) Weisen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten nach, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 3x - 1 & , \quad x < 1 \\ 2x^2 - x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$ differenzierbar ist, und geben Sie $f'(x_0)$ an. (*Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten, dass f in x_0 linksseitig und rechtsseitig differenzierbar ist.*)

(c) Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extremwerte von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln(x) \cdot \big(\ln(x) - 2\big)$$

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und schätzen Sie das Restglied für $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ nach oben ab.

Aufgabe 9 (14 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 x^3 - 3x^2 + 9x + 1 \, dx$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\pi}^0 (x^2+1) \cdot \sin(2x) \, dx$

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \exp\big(\cos^2(x) + 1\big) \, dx$

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'\sqrt{y} - \frac{10x+7}{\sqrt{y}} = 0 \quad , \quad y > 0 \quad , \quad y(1) = 5 \, .$$