Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Klausur am 10. Februar 2015

Name : ______________________
Matrikelnummer : ______________________
Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 4	5	6	7	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	8	19	24	10	61	7	3	-
erreichte Punkte								

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2014/15) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 4** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 5 bis 7** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden. **Ergebnisse sind so weit wie möglich zu vereinfachen!**
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- **Bitte nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe schreiben!**
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $\alpha \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl. Man kann zeigen, dass es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass

$$n\left(1+\frac{\alpha^4}{2}\right)-\sqrt{n} \quad > \quad 2+\frac{4}{2}\alpha^4-\sqrt{n}+n$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Wodurch wird die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$ gesichert?

☐ (a) Axiom des Archimedes

☐ (b) Peano-Axiome

☐ (c) Vollständige Induktion

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Welche Aussage ist für die Menge $M = \left\{ -\left|\sin(n-1)\right| \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ richtig?

☐ (a) $\min(M) = \inf(M) = -1$ und $\max(M) = \sup(M) = 0$.

☐ (b) $\min(M) = \inf(M) = 0$ und $\max(M) = \sup(M) = 1$.

☐ (c) M besitzt kein Minimum und es gilt $\inf(M) = -1$ und $\max(M) = \sup(M) = 0$.

☐ (d) M besitzt kein Maximum und es gilt $\min(M) = \inf(M) = -1$ und $\sup(M) = 0$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Die Glieder einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien auf $m \in \mathbb{N}$ konvergente Teilfolgen aufgeteilt, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die m konvergenten Teilfolgen

$$\left(a_{n_{1,k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \;,\; \left(a_{n_{2,k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \;,\; \left(a_{n_{3,k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \;,\; \ldots \;,\; \;,\; \left(a_{n_{m,k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \;,$$

mit $n_{i,k} \in \mathbb{N}$ für $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $k \in \mathbb{N}$ und folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein Indexpaar (i,k) mit $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_{n_{i,k}}$.

(ii) Zu jedem Indexpaar (i,k) mit $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_{n_{i,k}}$.

Welcher Schluss über die Anzahl der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist allgemein zulässig?

☐ (a) Die Folge hat genau m verschiedene Häufungspunkte.

☐ (b) Die Folge hat mindestens einen und höchstens m verschiedene Häufungspunkte.

☐ (c) Die Folge hat weniger als m Häufungspunkte.

☐ (d) Die Folge hat keine Häufungspunkte.

(Aufgaben 4 bis 7 - siehe Seite 3f.)

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, in $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion, und

$$T_f(x) \quad := \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

sei die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt x_0. Weiter sei $R \in (0, \infty)$ der Konvergenzradius von $T_f(x)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge, zu der es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\left|f^{(n)}(x_0)\right|}{n!} R^n \quad \leq \quad \left|a_n\right| \quad \leq \quad \sqrt[n]{\left|a_n\right|} \quad \leq \quad \frac{8}{9}$$

für alle $n \geq n_0$ gibt. Was folgt daraus?

☐ (a) $T_f(x)$ konvergiert für alle $x \in \big(x_0 - R, x_0 + R\big)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \big(x_0 - R, x_0 + R\big)$.

☐ (b) $T_f(x)$ konvergiert für alle $x \in \big[x_0 - R, x_0 + R\big)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \big[x_0 - R, x_0 + R\big)$.

☐ (c) $T_f(x)$ konvergiert für alle $x \in \big(x_0 - R, x_0 + R\big]$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \big(x_0 - R, x_0 + R\big]$.

☐ (d) $T_f(x)$ konvergiert für alle $x \in \big[x_0 - R, x_0 + R\big]$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \big[x_0 - R, x_0 + R\big]$.

Aufgabe 5 (19 Punkte)

(a) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{R}$ Infimum und Supremum der Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{2x-1}{\sqrt{3}x - 1} < \sqrt{3}x + 1\,, \quad x < \sqrt{3} \right\} .$$

Hat M in $\mathbb{R}$ ein Minimum und Maximum? Was ändert sich, wenn Sie die Menge M über dem Körper $\mathbb{Q}$ betrachten?
(*Hinweise: Fallunterscheidung bei der Lösung der Ungleichung. Es gilt* $\sqrt{3} \approx 1.7321$ *und* $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774$.)

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n \quad = \quad \left(\frac{5n^3 - 2n + 1}{3n^3 + 8n - 2} \;+\; \frac{4n^8 - n^6 + 2n^4 + (-1)^n}{8n^3 + 5n^5 - 7n^7 - 3n^8} \;+\; \frac{16n^2 - 7}{6n^2 + n - 2} \right)^3$$

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 2}{4^{k+1}}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n (n+3)!}$ konvergiert.

(e) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ konvergent?

(Aufgaben 6 und 7 - siehe Seite 4)

Aufgabe 6 (24 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} \dfrac{1-x^3}{e^{5(x-1)}-1} & , \quad x < 1 \\[2ex] \dfrac{3x^2-7x+1}{5x^2+x-1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig ist, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (*Hinweis: l'Hospital*)

(b) Berechnen Sie die Nullstellen sowie Koordinaten und Art der lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f(x) \; := \; \frac{-x^4+10x^2-9}{x^2} .$$

Berechnen Sie außerdem den Inhalt der Fläche, die die Funktion f zwischen ihren Nullstellen mit der x-Achse vollständig einschließt.
Hinweise: Zur Nullstellenberechnung ist die Substitution $z := x^2$ *hilfreich. Sollten Sie die Nullstellen nicht bestimmen können, dann berechnen Sie statt der geforderten Fläche das bestimmte Integral*

$$\int_1^3 f(x)\,dx.$$

(c) Gegeben sei die stückweise definierte, für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 3x\cos(x) & , \quad x < 0 \\ \sin(3x)\cdot\exp\big(\cos(3x)-1\big) & , \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

Untersuchen Sie, ob f in $x = 0$ differenzierbar ist, geben Sie die erste Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, und bestimmen Sie eine stetige und differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *(Hinweis zur Berechnung von F: Partielle Integration für $x < 0$, Integration mit geeigneter Substitution für $x > 0$.)*

Aufgabe 7 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{3,f}$ dritten Grades zur Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Schätzen Sie den Fehler betragsmäßig nach oben ab, der bei Ersetzung von f durch $T_{3,f}$ an der Stelle x für $\big|x-1\big| < \frac{1}{2}$ entsteht.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\quad y' = x^3y^4 \quad$ mit $\quad y(1) = \sqrt[3]{3} \quad .$