Brandenburgische Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Wiederholungsklausur am 24. September 2015

Name : ______________________
Matrikelnummer : ______________________
Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 4	5	6	7	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	8	21	23	8	60	7	3	-
erreichte Punkte								

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2014/15) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 4** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 5 bis 7** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden. **Ergebnisse sind so weit wie möglich zu vereinfachen!**
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- **Bitte nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe schreiben!**
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Behauptung: „Zu allen $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ existiert ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $x < z < y$". Ist dies richtig oder falsch?

☐ (a) richtig

☐ (b) falsch

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. In den Übungen wurde mittels der $\varepsilon - n_0$-Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen gezeigt, dass dann auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert. Warum kann man diesen Beweis nicht mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen führen, d.h. warum ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ allgemein falsch? Die Rechenregeln für konvergente Folgen können nicht angewendet werden, da

☐ (a) aus der Beschränkheit von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht folgt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

☐ (b) aus der Beschränkheit von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

☐ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ möglich ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in (a, b)$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, x_0)$

(ii) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0, b)$

(iii) $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$

Welche Eigenschaft besitzt f an der Stelle x_0?

☐ (a) Es gilt $f(x_0) = 0$. Weitere Nullstellen von f in $[a, b]$ sind nicht ausgeschlossen.

☐ (b) Es gilt $f(x_0) = 0$ und x_0 ist die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$.

☐ (c) f ist in x_0 nicht differenzierbar.

☐ (d) f ist in x_0 streng monoton fallend.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Für welche der folgenden Funktionenklassen folgt stets die Eindeutigkeit des Punktes $c \in (a, b)$ (unabhängig von weiteren, nicht bekannten Eigenschaften der Funktion f)?

☐ (a) Für jede beliebige stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

☐ (b) Für keine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

☐ (c) Für jede stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,
für die $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

☐ (d) Für jede stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,
für die $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Aufgabe 5 (21 Punkte)

(a) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{R}$ Infimum und Supremum der Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{|2x-3|}{\sqrt{5x}-1} \leq \sqrt{5x}+1 \;,\; \frac{1}{5} < x < \sqrt{5} \right\} .$$

Hat M in $\mathbb{R}$ ein Minimum und Maximum? Was ändert sich, wenn Sie die Menge M über dem Körper $\mathbb{Q}$ betrachten? (*Hinweise: Fallunterscheidung bei der Lösung der Ungleichung. Es gilt* $\frac{4}{7} \approx 0.5714$ *und* $\sqrt{5} \approx 2.2361$.)

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n \;=\; \sqrt[3]{\frac{2n^3-4n+5}{4n^3-n+977} + \frac{2n^8-n^6+2n^4+1}{3n^8+5n^5-7n^3+(-1)^n} + \frac{41n^2+n-7}{6n^2+2}}$$

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left((-2)^{-k} + 2^{-k}\right)$.

(d) Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{98^{n+2}}$ konvergiert.

(e) Weisen Sie nach, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n}}$ konvergiert. Ist die Reihe auch absolut konvergent?

Aufgabe 6 (23 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{5x^2-x+1}{x^2+3} & , \quad x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\sin(10\pi x)\cos(\pi x)}{2\pi\left(1-x^4\right)} & , \quad x > 1 \end{cases} .$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig ist, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Begründen Sie, warum $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie Koordinaten und Art der lokalen Extremstelle(n) der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;:=\; \frac{x^2-10x+9}{x} .$$

Berechnen Sie außerdem den Inhalt der Fläche, die die Funktion f zwischen ihren Nullstellen mit der x-Achse vollständig einschließt.

(c) Gegeben sei die stückweise definierte, für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+1)\sin(x) & , \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{\cos\big(\ln(x+1)\big)-1}{x+1} & , \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie eine stetige und differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (*Hinweis zur Berechnung von* F*: Partielle Integration für* $x < 0$*, Integration mit geeigneter Substitution für* $x > 0$.)

Aufgabe 7 (8 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{1}{3}xy' = \frac{x^3}{y^4}$ mit $y(2) = \sqrt[5]{120}$.

(b) Eine Potenzreihe hat allgemein die Gestalt $\sum a_n(x - x_0)^n$ mit einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Entwicklungsstelle x_0, die den Mittelpunkt des Konvergenzintervalls $(x_0 - R, x_0 + R)$ angibt. Bestimmen Sie die Entwicklungsstelle x_0 und den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n n}(2x - 1)^{n-2}$$