Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Klausur am 17. Februar 2016

Name : ______________________

Matrikelnummer : ______________________

Studiengang : ______________________

Aufgabe(n)	1 bis 3	4	5	6	7	8	9	$\sum$	Bonus Testklausur	Bonus Hausaufgaben	Note
mögliche Punkte	6	6	10	9	15	11	8	65	7	3	-
erreichte Punkte											

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind die **eigenen** Mitschriften aus Vorlesung und Übung, die eigenen Übungsblätter (aus dem Wintersemester 2015/16) mit Lösungen, ein Lehrbuch und eine Formelsammlung erlaubt.
- Die Benutzung von Taschenrechnern, Mobiltelefonen und sonstigen technischen Geräten ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet (und auch nicht erforderlich)! Derartige Geräte sind zudem außer Reichweite zu legen und abzuschalten. Zuwiderhandlungen ziehen eine Bewertung der Klausur mit der Note 5.0 nach sich.
- In jeder der **Aufgaben 1 bis 3** mit ☐-Kästchen **wählen Sie durch Ankreuzen die richtige Antwort** aus. **Mehrere Kreuze pro Aufgabe sind nicht möglich!**
- In den **Aufgaben 4 bis 9** muss jede Lösung **klar begründet** und der **Lösungsweg nachvollziehbar** angegeben werden! Ergebnisse aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden. **Ergebnisse sind so weit wie möglich zu vereinfachen!**
- Bitte versehen Sie **alle** Blätter, die Sie beschrieben haben und abgeben möchten, mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- **Bitte nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe schreiben!**
- Wenn Sie fertig sind, dann bringen Sie Ihre Klausur nicht nach vorn, sondern geben uns Bescheid und wir holen die Klausur ab. Dies gilt insbesondere am Ende der Bearbeitungszeit! Bitte geben Sie die Aufgabenblätter mit ab.
- Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis oder Ihren Personalausweis zur Kontrolle bereit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton wachsende Zahlenfolge. Welcher der folgenden Zusammenhänge zwischen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Menge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist richtig?

☐ (a) $\inf(M) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

☐ (b) $\sup(M) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \infty$

☐ (c) $\sup(M) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben seien eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Die Folge $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ habe zwei verschiedene Häufungspunkte A und B. Was folgt daraus für die Funktion f?

☐ (a) f ist in x_0 stetig.

☐ (b) f ist in x_0 unstetig.

☐ (c) Es ist keine Aussage zur Stetigkeit von f in x_0 möglich.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ seien Intervalle mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Es gelte $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I_1$ mit $x_1 < x_2$, und $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I_2$ mit $x_1 < x_2$. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{array}{lll} g : I_1 \to \mathbb{R} & \text{mit} & g(x) := f(x) \text{ für alle } x \in I_1 \\ h : I_2 \to \mathbb{R} & \text{mit} & h(x) := f(x) \text{ für alle } x \in I_2 \\ v : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R} & \text{mit} & v(x) := f(x) \text{ für alle } x \in I_1 \cup I_2 \end{array}$$

Welche allgemeinen Schlussfolgerungen sind hinsichtlich der Umkehrbarkeit von g, h und v möglich?

☐ (a) Die Funktionen g, h und v sind umkehrbar.

☐ (b) Die Funktionen g und h sind umkehrbar. Über die Umkehrbarkeit von v ist keine Aussage möglich.

☐ (c) Keine der Funktionen g, h oder v ist umkehrbar.

☐ (d) Zu keiner der Funktionen g, h und v ist eine Aussage zur Umkehrbarkeit möglich.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die Ungleichung

$$\frac{x-6}{x^2+2x-8} \geq 1\,.$$

(a) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der Ungleichung über dem Körper $\mathbb{R}$.

(b) Geben Sie $\inf(\mathcal{L})$ und $\sup(\mathcal{L})$ über dem Körper $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n \quad := \quad \frac{8n^3-7n^2+n+1}{4n^3+3n^2-88n-(-1)^n} \;-\; \frac{8n^2+n+999}{1893-n^2-n^3} \;+\; \left(\frac{16n^2+n+1}{2+3n+4n^2}\right)^2$$

(b) Begründen Sie, warum die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^3+n^2+n-1}{n^3+2n+8}$ divergiert.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-1)^{n-1}\cdot 5}{8^{n-1}}$.

(d) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{7^{n+2}(1-n)^n}$ absolut konvergent?

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sin(x) & , \quad x < \dfrac{\pi}{4} \\[2ex] c & , \quad x = \dfrac{\pi}{4} \\[2ex] \sqrt{2}-\cos(x) & , \quad x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad .$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass f für $x = \dfrac{\pi}{4}$ stetig ist (mit Begründung).

(b) Ist die Funktion f mit der in (a) ermittelten Konstanten c in $x = \dfrac{\pi}{4}$ differenzierbar? Wenn ja, dann geben Sie den Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = \dfrac{\pi}{4}$ an.

(c) Berechnen Sie eine stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Es gilt $\quad \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 7 (15 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) \quad := \quad \left(x^2-15\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}\right) \;.$$

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extremwerte von f. (*Hinweise: Wir empfehlen zur Berechnung der ersten Ableitung f' die Verwendung der Produktregel. Schreiben Sie die erste Ableitung als Produkt von zwei Polynomen vom Grad 2, und nutzen Sie diese Darstellung der ersten Ableitung zur Berechnung ihrer Nullstellen und auch zur Berechnung der zweiten Ableitung. Bei der Berechnung der zweiten Ableitung empfehlen wir, die entstehenden Produkte nicht auszumultiplizieren. Die Funktionswerte in den Extremstellen müssen nicht ausgerechnet werden.*)

(b) Berechnen Sie den Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{\exp\left(3x^2-12\right) - \ln\left(x^2-3\right) - 1}{\sqrt{13-x^2} - 3\cos(x-2)}$$

(c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) \;:=\; \ln(x+2) + \sqrt{x+2}\;.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ vom Grad 2 zu f um den Entwicklungspunkt $x_0 = -1$. Welchen Fehler macht man höchstens, wenn man f im Intervall $I = [-1, 0]$ durch $T_2(x)$ approximiert? Schätzen Sie zur Beantwortung dieser Frage $\big|f(x) - T_2(x)\big|$ für $x \in I$ nach oben ab.

Aufgabe 8 (11 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int (4x+1)\cdot e^{2x}\,dx$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\ln(2)}} 3x^2 e^{-3x^3}\,dx$ mit der Substitutionsmethode.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$4xyy' - 2y^2 \;=\; y^2 - 12yy' + 9\;,\;\; y(-2) = -2$$

mit der Methode der Trennung der Variablen.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \;:=\; \big(x^2 - 4\big)\cdot\big(y^2 - 9\big)\;.$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion, d.h. alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathrm{grad}(f) \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T \;=\; 0\;.$$

(b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix

$$H \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

ob f in den stationären Punkten jeweils ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt besitzt. (*Hinweis: Für Gradient und Hesse-Matrix sind auch andere Bezeichnungen üblich, die den Nabla-Operator* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ *verwenden:* grad$(f) = \nabla f$ *und* $H = \nabla^2 f$.)