

Splines

Vorlesung für die Studiengänge Mathematik und Wirtschaftsmathematik im Sommersemester 2011

Übungsblatt 1 - Abgabe bis Montag, 09. Mai 2011

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) := x^3 - 3x + 2$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_n(x)$ vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}$ mit einem Verfahren Ihrer Wahl zu den Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ mit den Stützwerten $f_i := f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, für die folgenden Fälle:

- (a) $n = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2$
- (b) $n = 1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 2$
- (c) $n = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$
- (d) $n = 3, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Von der Funktion $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ seien folgende Funktionswerte an den Stützstellen $x_0, \dots, x_4$ bekannt:

k	0	1	2	3	4
x_k	-2	-1	0	1	3
$f(x_k)$	11	1	1	5	121

Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $p_4(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$ vom maximalen Grad vier nach der Methode von Newton.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Mit der Lagrange- und der Newton-Interpolation seien die gleichen Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, $n \geq 2$ interpoliert worden, wobei die Werte $y_i := f(x_i)$ von einer im Intervall $[x_0, x_n]$ definierten und dort mindestens $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbaren Funktion $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ stammen.

- (a) Erhalten Sie die gleichen Polynome? Nennen Sie einen Vorteil der Newton- gegenüber der Lagrange-Interpolation.
- (b) Wovon hängt bei der Polynominterpolation der Fehler hauptsächlich ab?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$, das an der Stützstelle $x_0 = 1$ den Funktionswert $p(x_0) = 2$ hat und dessen erste drei Ableitungen in x_0 die Werte $p'(x_0) = 4$, $p''(x_0) = -6$ und $p'''(x_0) = 12$ annehmen.

(Aufgabe 5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Welche Bedingungen müssen die Stützstellen x_0 und x_1 erfüllen, wenn die Interpolationsaufgabe

$$p(x_0) = c_0 \quad , \quad p(x_1) = c_1 \quad , \quad p''(x_0) = c_0'' \quad , \quad p''(x_1) = c_1''$$

für ein kubisches Polynom p und beliebige $c_0, c_1, c_0'', c_1'' \in \mathbb{R}$ lösbar sein soll?