

Splines

Vorlesung für die Studiengänge Mathematik und Wirtschaftsmathematik im Sommersemester 2011

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Montag, 23. Mai 2011

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die lineare Spline-Interpolierende $s(x)$ zu den Daten

k	0	1	2	3	4
x_k	0	1	3	4	5
y_k	0	4	1	3	2

mit den Knoten x_0, x_1, x_2, x_3 und x_4

- (a) gemäß dem Ansatz $s_k(x) = A_k + B_k(x - x_k)$ für $k = 0, 1, \dots, 3$,
- (b) gemäß der Darstellung $s_k(t) = A_k + B_k t$ für $k = 0, 1, \dots, 3$ mit $t \in [0, 1]$ und $t := \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$ sowie
- (c) gemäß der Darstellung $s(x) = \alpha + \sum_{i=0}^3 \beta_i (x - x_i)_+$ mit $(x - z)_+ := \begin{cases} x - z & , \quad x \geq z \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben seien die Datenpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, die durch einen Polygonzug s interpoliert werden (wobei die Interpolationsstellen und die Knoten des Polygonzuges identisch sind). Zeigen Sie die folgenden formerhaltenden Eigenschaften:

- (a) Gilt $y_i > 0$ für $i = 0, 1, \dots, n$, so folgt die Positivität von $s(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- (b) Gilt $y_0 < y_1 < \dots < y_n$, so folgt die strenge Monotonie von $s(x)$, d.h. für alle $x, z \in [a, b]$ mit $x < z$ gilt $s(x) < s(z)$.
- (c) Erfüllen die Daten $y_0, y_1, \dots, y_n$ die Konvexitätsbedingung

$$y_j \leq \lambda_j y_i + (1 - \lambda_j) y_k \quad \text{mit} \quad \lambda_j := \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}$$

für $0 \leq i < j \leq k \leq n$, so folgt die Konvexität von s .

Hinweis zu (c): Beweisen Sie zunächst die folgende Hilfsbehauptung: Die Daten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ sind genau dann konvex, wenn gilt:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \leq \dots \leq \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

(Aufgaben 3 und 4 - siehe Seite 2)

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Stellen Sie die Basispolynome

$$N_i(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & , \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & , \quad x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-1$$

der linearen Spline-Interpolation als Linearkombination von Termen der Form $(x - x_{i-1})_+$, $(x - x_i)_+$ und $(x - x_{i+1})_+$ dar. Nehmen Sie zur Vereinfachung der Darstellung an, dass eine äquidistante Stützstellenverteilung gegeben ist. Welche Darstellung von $s(x)$ erhalten Sie dadurch?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei ein reellwertiges Intervall $[a, b]$ und daraus $2n + 3$ Punkte $a =: z_{-1} < x_0 < z_0 < x_1 < z_1 < \dots < z_{n-1} < x_n < z_n := b$. Die Werte $y_0, y_1, \dots, y_n$ seien an den Stellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ durch einen Polygonzug mit den Knoten $z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_n$ zu interpolieren. Untersuchen Sie dieses Problem für den Fall, dass die Splineknoten $z_{-1}, z_0, \dots, z_n$ mittig zwischen den Interpolationspunkten $x_0, x_1, \dots, x_n$ liegen. Diskutieren Sie Lösbarkeit und Darstellung dieser Splineaufgaben.