

Splines

Vorlesung für die Studiengänge Mathematik und Wirtschaftsmathematik im Sommersemester 2011

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Montag, 20.06.2011

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $[x_0, x_1]$ ein reellwertiges Intervall, d.h. $x_0 \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}, x_0 < x_1$. Der Funktionenraum $\mathbb{P}_1$ aller auf $[x_0, x_1]$ definierten Geraden habe die Basis $B_1 := \{t, 1\}$, d.h. zu $g \in \mathbb{P}_1$ gibt es Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = at + b$. Außerdem seien $N_{-1}(t)$ der lineare B-Spline zu den Knoten x_{-1}, x_0, x_1 und $N_0(t)$ der lineare B-Spline zu den Knoten x_0, x_1, x_2 , wobei $x_{-1} < x_0$ und $x_2 > x_1$ gelte. Weisen Sie nach, dass $B_2 := \{N_{-1}, N_0\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{P}_1$ ist, d.h. zu $g(t) = at + b \in \mathbb{P}_1$ gibt es Koeffizienten $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $g(t) = cN_{-1}(t) + dN_0(t)$ für alle $t \in [x_0, x_1]$ gilt. Für welche $t \in \mathbb{R}$ gilt $at + b = cN_{-1}(t) + dN_0(t)$?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie die quadratischen Spline-Interpolierenden $s_a(x)$ und $s_b(x)$ für die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ im Intervall $[-1, 1]$ mit den $n + 1 = 5$ Interpolationsstellen $x_0 = -1, x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}$ und $x_4 = 1$ für die folgenden Nebenbedingungen

(a) $s'_a(x_0) = f'(x_0)$ und

(b) $s'_b(x_0) = 0$,

wobei die Knoten z_k mit den Interpolationsstellen zusammenfallen sollen. Liegen die Interpolierenden $s_a(x)$ und $s_b(x)$ ebenso wie die vorgelegte Funktion $f(x)$ symmetrisch zur y -Achse?

Hinweis: Es wird nicht verlangt, die Interpolierenden auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ explizit zu bestimmen. Beantworten Sie diese Frage auf theoretischem Wege.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Finden Sie eine quadratische Spline-Interpolierende $s(x)$ für die Vorgaben

k	0	1	2	3	4
x_k	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_k	1	0	-1	0	1

mit den Knoten $x_0, \dots, x_4$, so dass $y = s(x)$ symmetrisch zur y -Achse liegt. Durch welche Zusatzbedingung ist diese Spline-Interpolierende eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die quadratische Spline-Interpolierende $s(x)$ zu den Daten

k	0	1	2	3
x_k	-3	-1	1	3
y_k	-1	1	-1	1

mit den Knoten $z_{-1} = -4, z_0 = -2, z_1 = 0, z_2 = 2$ und $z_3 = 4$ und den Randvorgaben $s(z_{-1}) = s(z_3) = 0$.