

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 1 - ohne Abgabe, Besprechung in der ersten Vorlesungswoche

Aufgabe 1.1 (14 Punkte)

- (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe $T_f(x)$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $T_f(x)$ gegen $f(x)$?
- (b) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Weisen Sie außerdem nach, dass für das Restglied $R(x)$ die Abschätzung $|R(x)| \leq \frac{1}{48}$ für alle $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ gilt.
- (c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(2x) + 1$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Weisen Sie außerdem nach, dass für das Restglied $R(x)$ die Abschätzung $|R(x)| < \frac{\pi^4}{20000}$ für alle $x \in \left[\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right]$ gilt.

Aufgabe 1.2 (7 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Datenpaare (x_i, y_i) :

i	x_i	y_i
1	-2	0
2	0	1
3	1	3
4	2	5

- (a) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade g zu den gegebenen Daten (x_i, y_i) .
- (b) Bestimmen Sie ein Polynom p höchstens zweiten Grades, das den Datensatz bezüglich der mittleren quadratischen Abweichung am besten approximiert.
- (c) Zeichnen Sie die Daten (x_i, y_i) , die Gerade g und das Polynom p in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 1.3 (7 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \quad \text{mit} \quad f(g) := g \cdot x + g(2) \cdot x^4$$

linear ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix sowie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ und $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$. Geben Sie außerdem die notwendigen Rechenschritte an, mit denen das Polynom $p(x) := 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ durch die Abbildung f mit Hilfe der Abbildungsmatrix ausgewertet wird. (Hinweis: Dabei bezeichnet $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ den Vektorraum aller Polynome vom Höchstgrad $n = 3, 4$.)

Aufgabe 1.4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, durch die die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(\mathbf{a}_i) := \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ eindeutig bestimmt ist, wobei

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.5 (5 Punkte)

Programmieren Sie eine Matlab-Funktion zur Berechnung der Determinante einer beliebig gewählten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei die Determinante bzw. auch alle Unterdeterminanten nach der ersten Spalte entwickelt werden sollen. Testen Sie Ihre Funktion an selbst gewählten Beispielen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen der durch Matlab bereitgestellten Funktion `det.m` und diskutieren Sie Unterschiede zwischen `det.m` und Ihrer eigenen Funktion.

Aufgabe 1.6 (5 Punkte)

Schreiben Sie Matlab-Funktionen, mit deren Hilfe die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x < -1 \\ \max(g(x), h(x)) & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ h(x) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

an beliebigen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ausgewertet werden kann. Dabei sind $g: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Beachten Sie, dass f, g und h nicht stetig sein müssen. Es soll möglich sein, f in mehr als einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ auszuwerten. Testen Sie Ihr Programm mit den Funktionen

$$(a) \quad g(x) = \sin(\pi x) \quad \text{und} \quad h(x) = 1 + \cos(\pi x)$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{für } x < -2 \\ x + 2 & \text{für } -2 \leq x \leq -1 \end{cases} \quad \text{und} \quad h(x) = \begin{cases} 2 - x^8 & \text{für } x < 1 \\ 3 + x + \cos(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Stellen Sie die Funktion f jeweils im Intervall $[-3, 3]$ graphisch dar. Verzichten Sie auf die Verwendung der Symbolic Toolbox, sowie auf die Verwendung von `for`- und `while`-Schleifen!

Aufgabe 1.7 (5 Punkte)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion zur Berechnung der Nullstelle einer beliebigen, stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe des Bisektions-Verfahrens. Testen Sie Ihre Funktion zur Berechnung der Nullstellen der Funktionen $f(x) = \ln(x)$ sowie $f_{1,c}(x) = \ln(x) + c$ und $f_{2,c}(x) = x^3 + \cos(cx)$, jeweils für $c = 1$ und $c = 2$, und $f_{3,c,d} = cx - \sin(dx) - 1$ für die Wertepaare $(c, d) = (1, 2)$, $(c, d) = (1, 3)$, $(c, d) = (-1, 2)$ und $(c, d) = (-1, -0.5)$.