Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Dienstag, 30.04.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 2.1 (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Hornerschemas, dass das Polynom $f(x) = 4x^5 - 6x^4 - 13x^3 + 3x^2 - x - 159$ an der Stelle $x = 3$ verschwindet, und spalten Sie den Linearfaktor dieser Nullstelle vom Polynom ab, indem Sie die Koeffizienten des Polynoms g mit $f(x) = (x-3) \cdot g(x)$ im Hornerschema ablesen.

(b) Werten Sie mit Hilfe des Hornerschemas das Polynom $f(x) = 3x^6 + 3x^4 + 5x^3 - 2x - 7$ an der Stelle $x = 3$ aus. Stellen Sie f in der Form $f(x) = (x-3) \cdot g(x) + f(3)$ dar.

Aufgabe 2.2 (5 Punkte)

Entwickeln Sie das Polynom $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 10$ mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas an der Stelle $x = 2$ in ein Taylorpolynom, und geben Sie sämtliche Ableitungswerte von f an der Stelle $x = 2$ an.

Aufgabe 2.3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie unter Verwendung des Hornerschemas alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$f(x) \;:=\; x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 26x^2 + 13x - 30 \;=\; 0\,.$$

(*Hinweis: Bestimmen Sie zuerst alle ganzzahligen Lösungen.*)

Aufgabe 2.4 (6 Punkte)

Von der Funktion $f(x)$ seien die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte an den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_4$ bekannt:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	15	-1	1	15	83

Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_4 x^4$ vom maximalen Grad 4

(a) nach der Lagrange-Darstellung $p(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i) L_i(x)$ mit den Lagrange-Polynomen $L_0, \ldots, L_4$

(b) nach der Methode von Newton.

Aufgabe 2.5 (6 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ sei im Intervall $[10, 12]$ durch ein quadratisches Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit drei äquidistanten Stützstellen $x_0 = 10$, $x_1 = 11$ und $x_2 = 12$ interpoliert.

(a) Zeigen Sie, dass der Interpolationsfehler an der Stelle $x = 11.1$ betragsmäßig kleiner als $\frac{1}{3}10^{-4}$ ist.

(b) Bestimmen Sie das Vorzeichen der Fehlerfunktion $g(x) = f(x) - p(x)$ für beliebige $x \in [10, 12]$.

(*Hinweis: Es wird nicht verlangt, das Interpolationspolynom explizit auszurechnen!*)

Aufgabe 2.6 (15 Punkte)

Sind $x_0, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Stützstellen mit vorgeschriebenen Funktionswerten $f_0, \ldots, f_n$, dann hat die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms p die Form

$$p(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x),$$

wobei L_j die Lagrange-Polynome sind.

(a) Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Auswertung eines Interpolationspolynoms in der Lagrange-Darstellung, wenn das Interpolationspolynom an einer Stelle x naiv ausgewertet wird, d.h. die Produktsumme in oben angegebener Form gebildet wird? Zählen Sie nur die Punktoperationen.

(b) Zeigen Sie, dass das Interpolationspolynom p die baryzentrische Darstellung

$$p(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x - x_j} f_j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x - x_j}} \quad \text{mit den baryzentrischen Gewichten} \quad b_j := \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i) \right)^{-1}$$

besitzt, indem Sie benutzen, dass die Lagrange-Funktionen eine Zerlegung der Eins bilden.

(c) Wieviele Punktoperationen sind erforderlich, um $p(x)$ in der baryzentrischen Darstellung auszuwerten?

(d) Wie hoch ist der Aufwand, wenn das Polynom wiederholt an verschiedenen Stellen ausgewertet wird, und bereits berechnete Werte zwischengespeichert werden dürfen?

(e) Bestimmen Sie die baryzentrischen Gewichte $b_0, b_1, \ldots, b_n$ im Falle $n = 4$ mit den äquidistanten Stützstellen $x_i = i$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

(f) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (c) und (d) mit der Interpolationsmethode nach Newton.