

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Dienstag, 28.05.2013, 12 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 4.1 (5 Punkte)

Die Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$ kann man auch rekursiv durch

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

definieren (in der Vorlesung war das eine Folgerung). Weisen Sie ohne Rückgriff auf das Resultat aus der Vorlesung für $x \in [-1, 1]$ und $k \in \mathbb{N}$ nach, dass $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x))$ gilt.

Aufgabe 4.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Hermite-Interpolierende p als Polynom maximal 5. Grades, die an den Stützstellen $x_i = i$, $i = 0, 1, 2$ die in der Tabelle

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	6	4	20
$f'(x_i)$	—	2	39
$f''(x_i)$	—	14	—

angegebenen Funktions- und Ableitungswerte annimmt.

Aufgabe 4.3 (6 Punkte)

Warum ist die durch die Tabelle

x_i	0	1
$f(x_i)$	1	1
$f'(x_i)$	-1	—
$f''(x_i)$	—	8

gegebene Interpolationsaufgabe im Sinne der sonst in der Vorlesung betrachteten Aufgaben nicht korrekt gestellt? Finden Sie zwei verschiedene Polynome $p(x)$ und $q(x)$ vierten Grades, die alle Bedingungen der Tabelle erfüllen und für die außerdem $p'(x_1) = 2$ und $q'(x_1) = 3$ gilt. Gibt es ein kubisches Polynom, das die in der Tabelle angegebenen Forderungen erfüllt?

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Geben Sie das Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_3$ an, das an der Stützstelle $x_0 = -1$ den Funktionswert $y_0 = 2$ hat und dessen erste drei Ableitungen die Werte $y'_0 = 4$, $y''_0 = -6$ und $y'''_0 = 12$ annehmen. Geben Sie p in der Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an.

(Aufgaben 4.5 und 4.6 - siehe Seite 2)

Aufgabe 4.5 (5 Punkte)

- (a) Formulieren Sie zu $f \in C^m[a, b]$ die Hermite-Interpolationsaufgabe, deren Lösung das Taylor-Polynom n -ten Grades zu f um einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (a, b)$ ist. Beweisen Sie den Zusammenhang mit Hilfe der verallgemeinerten dividierten Differenzen (für Hermite-Interpolation).
- (b) Geben Sie das Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_3$ an, das an der Stützstelle $x_0 = 2$ den Funktionswert $y_0 = 1$ hat und dessen erste drei Ableitungen die Werte $y'_0 = 4$, $y''_0 = -8$ und $y'''_0 = 16$ annehmen. Geben Sie p in der Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an.

Aufgabe 4.6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) := e^x$ das Hermite-Interpolationspolynom p zu den Vorgaben $(x_i, f(x_i))$, $(x_i, f'(x_i))$ zu den Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Nutzen Sie dazu die Newton-Darstellung mit einem Schema dividiertter Differenzen. Schätzen Sie im Intervall $I = [0, 1]$ den Fehler $|f(x) - p(x)|$ ab.