

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 5 - Hinweis: Die Abgabetermine zu den Aufgaben sind verschieden!

Aufgabe 5.1 (5 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, 11.06.2013, 12 Uhr im Postfach 32 im HG

Diskutieren Sie die Lösbarkeit der rationalen Interpolationsaufgabe zu den Vorgaben

x_i	0	1	2	3
f_i	1	0	3	4

durch rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax^2+bx+c}{rx+t}$. Lösen Sie dazu das homogene lineare Gleichungssystem $p(x_i) - f_i \cdot q(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Gibt es unerreichbare Punkte?

(Hinweis: Beachten Sie, dass Zähler- und Nennerfunktion nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt sind.)

Aufgabe 5.2 (5 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, 11.06.2013, 12 Uhr im Postfach 32 im HG

Diskutieren Sie die Lösbarkeit der rationalen Interpolationsaufgabe zu den Vorgaben

x_i	-2	-1	0	1	3
f_i	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-4

durch rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax^2+bx+c}{rx^2+sx+t}$. Lösen Sie dazu das homogene lineare Gleichungssystem $p(x_i) - f_i \cdot q(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Gibt es unerreichbare Punkte?

(Hinweis: Beachten Sie, dass Zähler- und Nennerfunktion nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt sind.)

Aufgabe 5.3 (5 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, 11.06.2013, 12 Uhr im Postfach 32 im HG

Bestimmen Sie eine rationale Interpolierende für die Vorgaben

x_i	0	1	2	3
f_i	1	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{25}{7}$

durch Bestimmung der inversen Differenzenquotienten und den daraus gebildeten Kettenbruch. Überführen Sie Ihr Ergebnis in die Form $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Aufgabe 5.4 (10 Punkte)

Programmieraufgabe - Abgabe als Ausdruck und per E-Mail bis 18.06.2013

Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von rationalen Interpolierenden mit Hilfe der inversen Differenzenquotienten. Geben Sie die Lösung im nicht entarteten Fall als Kettenbruch an, und achten Sie darauf, dass ihr Programm im Entartungsfall nicht abstürzt, sondern mit der Ausgabe „entarteter Fall“ abbricht. Lösen Sie mit Ihrem Programm folgende rationale Interpolationsaufgaben.

(a) $f(x) = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$, $x_0 = -5$, $x_n = 4$, $n = 5, 10$ äquidistante Stützstellen

(b) $g(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$, $x_0 = -5$, $x_n = 5$, $n = 5, 10$ äquidistante Stützstellen

(c) $h(x) = \frac{x^2 \exp(x^2 - 1) - x^4}{1 - x^2 \exp(1 - x^2)}$ für $x \notin \{-1, 1\}$ und $f(-1) = f(1) = 1$, $x_0 = -1.5$, $x_n \leq 1.5$. $n = 5, 10$.

Wählen Sie geeignete Stützstellen, um nichtentartete Fälle zu erhalten.

Rechnen Sie mit numerischen Werten für die Funktionen f , g und h . Stellen Sie die Ergebnisse und die zugehörigen Fehlerfunktionen jeweils grafisch dar.

(Aufgabe 5.5 und 5.6 - siehe Seite 2)

Aufgabe 5.5 (6 Punkte)**Abgabe bis Dienstag, 18.06.2013, 12 Uhr im Postfach 32 im HG**

Für die Kotangensfunktion $f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{180}x\right)$ im Gradmaß wurden folgende Werte aus einer Tafel entnommen:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	57.28996163
1	2	28.63625328
2	3	19.08113669
3	4	14.30066626
4	5	11.43005230

Ermitteln Sie den Näherungswert für $f(2.5)$

- (a) durch Polynominterpolation vom maximalen Grad 4 und
- (b) durch rationale Interpolation mit höchstens quadratischen Zähler- und Nennerpolynomen.

Vergleichen Sie die Ergebnisse in beiden Fällen mit dem exakten Wert $f(2.5) = 22.9037655484 \dots$

(Hinweis: Sie können ein selbst geschriebenes (!) Programm verwenden, z.B. für (a) analog/aus Übungsblatt 3 oder für (b) aus Aufgabe 5.4. Die Quelltexte wie auch die Ausgaben des Programms sind in ausgedruckter Form mit abzugeben, auch dann, wenn die Quelltexte ggf. früher schon einmal bewertet wurden.)

Aufgabe 5.6 (10 Punkte)**Abgabe bis Dienstag, 18.06.2013, 12 Uhr im Postfach 32 im HG**

Die Funktion $f(x) = \frac{\ln(x+10)}{\sqrt{x^2+1}}$ soll im Intervall $[-5, 5]$ durch

- (a) Polynominterpolation und
- (b) rationale Interpolation

mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen $-5 =: x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n := 5$ für $n = 3, 5, 7, 10, 15$ interpoliert werden. Stellen Sie die Funktion f , die Interpolierenden sowie die Stützstellen/-werte für jedes $n = 3, 5, 7, 10, 15$ in je einer Grafik gemeinsam dar. Was fällt Ihnen bei der rationalen Interpolation für $n = 10$ auf? Welche Ursachen kann diese Beobachtung haben? Berechnen Sie außerdem für jedes $n = 3, 5, 7, 10, 15$ Näherungswerte für $f(0.5)$ und $f(2.5)$ mit jeweils beiden Interpolierenden, und vergleichen Sie die Ergebnisse in beiden Fällen mit dem exakten Werten $f(0.5) = 2.103133966 \dots$ bzw. $f(2.5) = 0.9380320695 \dots$

(Hinweis: Sie können ein selbst geschriebenes (!) Programm verwenden, z.B. für (a) analog/aus Übungsblatt 3 oder für (b) aus Aufgabe 5.4. Die Quelltexte wie auch die Ausgaben des Programms sind in ausgedruckter Form mit abzugeben, auch dann, wenn die Quelltexte ggf. früher schon einmal bewertet wurden.)