

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Elementarmatrizen

- **Definition:** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, k \leq m$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ heißen die Matrizen

$$\begin{aligned}
 P_{ik} &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & | & 1 & & & | & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ - & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ & & & | & & & & | & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{ik}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ - & - & - & 1 & - & - & - & \lambda & - & - & - \\ & & & | & 1 & & & | & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & | & & & & | & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_i(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ - & - & - & \lambda & - & - & - & 0 & - & - & - \\ & & & | & 1 & & & | & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & | & & & & | & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

aus $\mathbb{K}^{m \times m}$ Elementarmatrizen. Außer den eingetragenen oder durch Punkte angedeuteten Komponenten sind dabei alle anderen Matriceinträge gleich Null.

- Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Multiplikation von links mit Elementarmatrizen bewirkt Zeilenumformungen, genauer:
 - $P_{ik} \cdot A$ bewirkt die Vertauschung der i -ten und k -ten Zeilen in A ,
 - $Q_{ik}(\lambda) \cdot A$ bewirkt die Addition der λ -fachen k -ten Zeile zur i -ten Zeile in A und
 - $M_i(\lambda) \cdot A$ bewirkt die Multiplikation der i -ten Zeilen von A mit $\lambda \neq 0$.
- Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Multiplikation von rechts mit Elementarmatrizen bewirkt Spaltenumformungen, genauer:
 - $A \cdot (P_{ik})^T = A \cdot P_{ki}$ bewirkt die Vertauschung der i -ten und k -ten Spalte in A ,
 - $A \cdot (Q_{ik}(\lambda))^T = A \cdot Q_{ki}$ bewirkt die Addition der λ -fachen k -ten Spalte zur i -ten Spalte in A und
 - $A \cdot (M_i(\lambda))^T = A \cdot M_i(\lambda)$ bewirkt die Multiplikation der i -ten Spalte von A mit $\lambda \neq 0$.

Man beachte dabei die Transposition der Elementarmatrizen!

- Elementarmatrizen sind invertierbar und ihre Inversen sind ebenfalls Elementarmatrizen. Es gilt:

$$(P_{ik})^{-1} = P_{ik} \quad , \quad (Q_{ik}(\lambda))^{-1} = Q_{ik}(-\lambda) \quad \text{und} \quad (M_i(\lambda))^{-1} = M_i(\frac{1}{\lambda})$$

- Elementarmatrizen und Berechnung der Inversen einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$:

- **Satz:** Jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ ist endliches Produkt von Elementarmatrizen.
- Beweis(skizze):
 - wegen $\text{rg}(A) = m$ kann A zu einer Matrix D in Zeilenstufenform überführt werden, wobei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_{mm} \end{pmatrix}$$

mit $d_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, m$

- jede Zeilenumformung entspricht der Multiplikation mit Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_j$ von links, d.h. es gilt

$$D = S_j \cdot S_{j-1} \cdot \dots \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot A$$

- durch weitere elementare Zeilenumformungen kann D so umgeformt werden, dass daraus die Einheitsmatrix E_m entsteht, d.h. es gibt Elementarmatrizen $S_{j+1}, \dots, S_r$ mit

$$E_m = S_r \cdot \dots \cdot S_{j+1} \cdot D = S_r \cdot \dots \cdot S_1 \cdot A$$

- es folgt

$$A^{-1} = S_r \cdot \dots \cdot S_1 \quad \text{bzw.} \quad A = S_1^{-1} \cdot \dots \cdot S_r^{-1}$$

- Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix zu $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$:
 1. Man schreibe A und E_m nebeneinander
 2. Überführe A mit elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform. Alle Umformungen für A werden parallel auch bei E_m durchgeführt.
 3. Ist $\text{rg}(A) < m$, dann kann abgebrochen werden, da A nicht invertierbar ist.
 4. Ist $\text{rg}(A) = m$, dann führe weitere elementaren Zeilenumformungen durch, bis aus A die Einheitsmatrix E_m entsteht.

- Beispiel (vgl. Aufgabe Ü13.1 aus den Übungen):

$A =$	$E_3 =$	Multiplikation von links mit
1 1 0	1 0 0	$Q_{21}(-1)$
1 0 1	0 1 0	
0 1 1	0 0 1	
1 1 0	1 0 0	$Q_{32}(1)$
0 -1 1	-1 1 0	
0 1 1	0 0 1	
1 1 0	1 0 0	$M_2(-1)$
0 -1 1	-1 1 0	
0 0 2	-1 1 1	
1 1 0	1 0 0	$M_3(\frac{1}{2})$
0 1 -1	1 -1 0	
0 0 2	-1 1 1	
1 1 0	1 0 0	$Q_{23}(1)$
0 1 -1	1 -1 0	
0 0 1	$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	
1 1 0	1 0 0	$Q_{12}(-1)$
0 1 0	$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	
0 0 1	$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	
1 0 0	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$	
0 1 0	$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	
0 0 1	$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	
$= E_3$	$= A^{-1}$	

Es gilt

$$A^{-1} = Q_{12}(-1) \cdot Q_{23}(1) \cdot M_3(\frac{1}{2}) \cdot M_2(-1) \cdot Q_{32}(1) \cdot Q_{21}(-1)$$

und

$$E_3 = Q_{12}(-1) \cdot Q_{23}(1) \cdot M_3(\frac{1}{2}) \cdot M_2(-1) \cdot Q_{32}(1) \cdot Q_{21}(-1) \cdot A.$$

- Elementarmatrizen und Normalform:

- **Definition:** Zwei Matrizen $A, D \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißen äquivalent, wenn es reguläre Matrizen $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$ und $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit $D = B \cdot A \cdot C$.
- **Satz/Definition:** Zwei Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie bezüglich verschiedener Paare von Basen von $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$ die gleiche lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ beschreiben. Die Matrizen B und C heißen Transformationsmatrizen (für die Koordinatentransformation von einer Basis in die andere Basis des $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$).
- **Satz/Definition:** Zwei Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Rang haben. Insbesondere ist jede Matrix von Rang r äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizen dieser Gestalt repräsentieren die Äquivalenzklassen und heißen Normalformen.

- **Satz:** Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ läßt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bringen.

◦ Rechenverfahren zur Bestimmung regulärer Matrizen $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$ und $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

1. Man überführe A mittels elementarer *Zeilenumformungen* in Zeilenstufenform, was der Multiplikation mit Elementarmatrizen $L_1, \dots, L_j$ von links entspricht. Es gilt $B = L_j \cdot \dots \cdot L_1$.
 2. Man überführe $B \cdot A$ mittels elementarer *Spaltenumformungen* in die gewünschte Form (*), was der Multiplikation mit Elementarmatrizen $R_1, \dots, R_l$ von rechts entspricht. Es gilt $C = R_1 \cdot \dots \cdot R_l$.
- Beispiel (vgl. Aufgabe Ü14.5 aus den Übungen):

Multiplikation von links	$E_4 =$	$A =$		Multiplikation von rechts
$Q_{41}(-1)$	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1	1 1 0 1 -1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 -1 0 0		
$Q_{24}(1)$ $Q_{34}(1)$ $M_4(-1)$	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 -1 0 0 1	1 1 0 1 -1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 -1 -1 1		
P_{24} $M_3(-1)$	1 0 0 0 -1 1 0 1 -1 0 1 1 1 0 0 -1	1 1 0 1 -1 0 0 0 -1 2 0 0 0 -1 2 0 0 -1 1 -1		
$Q_{13}(-1)$ $Q_{23}(-1)$ $Q_{43}(1)$	1 0 0 0 1 0 0 -1 1 0 -1 -1 -1 1 0 1	1 1 0 1 -1 0 0 1 1 -1 0 0 0 1 -2 0 0 0 -1 2		
	0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 -1 -1 0 1 -1 0	1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 -2 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1	$(Q_{21}(-1))^T$ $(Q_{51}(-1))^T$ $(Q_{53}(-1))^T$ $(Q_{54}(2))^T$
	$= B$	$= BA$	$= E_5$	
		1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	1 -1 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 -1 0 0 0 1 2 0 0 0 0 1	$(P_{23})^T$ danach $(P_{34})^T$
		1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 -1 -1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 -1 0 0 1 1 2 0 0 0 0 1	
		$= BAC$	$= C$	

Es gilt

$$B = Q_{43}(1) \cdot Q_{23}(-1) \cdot Q_{13}(-1) \cdot M_3(-1) \cdot P_{24} \cdot M_4(-1) \cdot Q_{34}(1) \cdot Q_{24}(1) \cdot Q_{41}(-1)$$

und

$$\begin{aligned}
C &= (P_{34} \cdot P_{23} \cdot Q_{54}(2) \cdot Q_{53}(-1) \cdot Q_{51}(-1) \cdot Q_{21}(-1))^T \\
&= (Q_{21}(-1))^T \cdot (Q_{51}(-1))^T \cdot (Q_{53}(-1))^T \cdot (Q_{54}(2))^T \cdot (P_{23})^T \cdot (P_{34})^T \\
&= Q_{12}(-1) \cdot Q_{15}(-1) \cdot Q_{35}(-1) \cdot Q_{45}(2) \cdot P_{32} \cdot P_{43}
\end{aligned}$$