

Lösung linearer Gleichungssysteme mit quadratischen Matrizen nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren mit Zeilen- und Spaltenpivotisierung, $\text{rg}(A) \leq n$

Schritt 1:

Eingabe: $(A|b)$ sei eine reelle $(n \times (n+1))$ Matrix (Ausgangstableau)

Ausgabe: $(R|c) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist und nur Nulleinträge in den letzten $n-r$ Zeilen von R hat; Permutation π mit $Rx_\pi = c \Leftrightarrow Ax = b$; dabei ist $r = \text{rg}(A) = \text{rg}(R)$

Rechenschritte:

1.0: Setze $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) = (1, 2, \dots, n)$.

1.1: Für $j = 1, 2, \dots, n-1$ und im aktuellen Tableau führe folgende Schritte 1.2 bis 1.6 durch:

1.2: Bestimme q und s mit

$$|a_{qs}| = \max_{\substack{j \leq i \leq n \\ j \leq k \leq n}} |a_{ik}|$$

1.3: Falls $|a_{qs}| = 0 \Rightarrow$ Abbruch!

mit: $r = \text{rg}(A) = j-1$; $(R|c)$ als aktuellem Tableau; Ausgabe von R, c, π, r

1.4: a) Vertausche Zeile j mit Zeile q und danach Spalte j mit Spalte s im aktuellen Tableau

b) Vertausche in π die Werte $\pi(j)$ und $\pi(s)$

1.5: Für $i = j+1, j+2, \dots, n$ führe folgenden Schritt 1.6 durch:

1.6: Subtrahiere das $\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ -fache von Zeile j von Zeile i im aktuellen Tableau

Mit der Ausgabe R, c und π aus Schritt 1 führe die Rückwärtssubstitution durch:

Schritt 2:

Eingabe: $(R|c) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist und nur Nulleinträge in den letzten $n-r$ Zeilen von R hat; Permutation π mit $Rx_\pi = c \Leftrightarrow Ax = b$; dabei ist $r = \text{rg}(R)$

Ausgabe: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Rx_\pi = c$

Rechenschritte:

2.1: Falls es ein $k \in \{r+1, r+2, \dots, n\}$ mit $c_k \neq 0$ gibt $\Rightarrow$ Abbruch! (es gibt keine Lösung)

2.2: Wähle $x_{\pi(r+1)}, \dots, x_{\pi(n)} \in \mathbb{R}$ beliebig.

2.3: Für $k = r, r-1, \dots, 1$ berechne $x_{\pi(k)} = \frac{1}{r_{kk}} (c_k - r_{k,k+1}x_{\pi(k+1)} - \dots - r_{k,n}x_{\pi(n)})$