

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus - Teil 1

Ein System von $m \geq 1$ linearen Gleichungen mit $n \geq 1$ Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (1)$$

heißt lineares Gleichungssystem, wobei $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Das Gleichungssystem (1) heißt homogen, falls $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Andernfalls ist (1) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Die Lösungen $(x_1, \dots, x_n)$ sind Elemente des $\mathbb{R}^n$, die Gesamtheit aller Lösungen heißt Lösungsraum des Gleichungssystems. Dabei kann der Lösungsraum auch leer sein, d.h. das System (1) ist in diesem Fall unlösbar. Statt für $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}$ kann man (1) auch für $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{K}$ aus einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ formulieren. Nachfolgend wird aber vereinfachend nur der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ angenommen.

Um die Rechnungen zur Lösung von (1) übersichtlich zu halten, ist es zweckmäßig, nur die zu (1) zugehörige Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zu betrachten bzw. die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$, wenn die rechte Seite b mit dazugenommen wird:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (2)$$

Mit Hilfe der Matrixmultiplikation kann man (1) abkürzend als $A \cdot x = b$ notieren, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Zwei Gleichungssysteme heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Eine wesentliche Strategie bei der Lösung linearer Gleichungssysteme ist es, durch geeignete Umformungen äquivalente Systeme zu erzeugen, die weniger Variablen haben, d.h. man eliminiert Variable. Die folgenden elementaren Umformungen ändern die Lösungsmenge nicht:

- Vertauschen zweier Gleichungen
- Addition des λ -fachen der Gleichung k zur Gleichung i
- Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$

Schritt 1 bei der Lösung von (1) ist es, $(A|b)$ mit der Hilfe der genannten elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform $(R|c)$ zu überführen, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist. Falls das System lösbar ist, dann erhält man aus $Rx = c$ im Schritt 2 durch Rückwärtseinsetzen die Lösung x von (1). Dieses Verfahren heißt Gauß'sches Eliminationsverfahren oder einfach Gauß-Algorithmus. Nachfolgend wird die in der Vorlesung behandelte (und in der gegebenen Darstellung speziell für die Rechnung in den reellen Zahlen zugeschnittene)¹ Darstellung des Algorithmus angegeben, wobei nur der Fall einer $(n \times n)$ -Matrix behandelt wird:

¹Die beiden nachfolgenden Algorithmen lassen sich auch auf andere Körper übertragen. Zum Beispiel sind die darin vorkommenden Divisionen allgemeiner durch die Multiplikation mit dem Inversen zu ersetzen.

Algorithmus 1:

Gauß'sches Eliminationsverfahren mit Zeilenpivotisierung; $\text{rg}(A) = n = m$

- **Schritt 1:**

Eingabe: $(A|b)$ sei eine reelle $(n \times (n+1))$ Matrix

Ausgabe: $(R|c) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist mit $Rx = c \Leftrightarrow Ax = b$

Rechenschritte:

1.1: Für $j = 1, 2, \dots, n-1$ führe folgende Schritte 1.2 bis 1.6 durch:

1.2: Bestimme r mit $j \leq r \leq n$: $|a_{rj}| = \max_{j \leq i \leq n} |a_{ij}|$

1.3: Falls $|a_{rj}| = 0 \Rightarrow$ Abbruch! (A ist singulär, d.h. $\text{rg}(A) < n$)

1.4: Vertausche Zeile j und Zeile r

1.5: Für $i = j+1, j+2, \dots, n$ führe folgenden Schritt 1.6 durch:

1.6: Subtrahiere das $\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ -fache von Zeile j von Zeile i

Mit der Ausgabe R und c aus Schritt 1 führe die Rückwärtssubstitution durch:

- **Schritt 2:**

Eingabe: $(R|c)$ sei eine reelle $(n \times (n+1))$ Matrix, wobei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix ist

Ausgabe: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Rx = c$

Rechenschritte:

2.1: Für $k = n, n-1, \dots, 1$ führe folgende Schritte 2.2 bis 2.3 durch:

2.2: Falls $r_{kk} = 0 \Rightarrow$ Abbruch! (R ist singulär, d.h. $\text{rg}(R) < n$)

2.3: Berechne $x_k = \frac{1}{r_{kk}} (c_k - r_{k,k+1}x_{k+1} - \dots - r_{k,n}x_n)$

Bemerkungen:

- Gilt $\text{rg}(A) = n$, dann sind die Schritte 1.3 bzw. 2.2 überflüssig, da es in einer regulären Matrix A keine derartigen Spalten gibt, in denen (auch nach Durchführung elementarer Zeilenoperationen) nur Nullen stehen. Da sich der hier angegebene Algorithmus aber direkt zur Umsetzung in ein Computerprogramm eignet, und man einer quadratischen Matrix ohne weitere Rechnungen nicht immer ansieht, ob sie regulär oder singulär ist, wurden hier die Schritte 1.3 und 2.2 zur Sicherheit mit aufgenommen. So entsteht ein robuster Algorithmus, der bei einer singulären Matrix A nicht einfach abstürzt, sondern mit einer Fehlermeldung beendet werden kann.
- Der Gauß-Algorithmus wird oft nicht ohne Zeilenvertauschungen durchführbar sein. Ist zum Beispiel das Element $a_{11} = 0$, so könnte man den Algorithmus gar nicht erst starten. Um einen Start zu ermöglichen, wird ein von Null verschiedenes Element der ersten Spalte von A gewählt, das so genannte Pivotelement. Bei der Rechnung mit Zettel und Stift ist es ratsam, falls möglich 1 oder -1 als Pivotelement zu wählen, womit ggf. verhindert werden kann, dass im weiteren Verlauf der Rechnung Brüche entstehen. Für die Berechnung mit Hilfe eines Computers ist es sinnvoller, das betragsgrößte Element zu wählen, damit der Algorithmus möglichst stabil laufen kann. Statt der hier verwendeten Zeilenpivotisierung kann man das Pivotelement auch in der Spalte suchen (Spaltenpivotisierung), wobei dann Spalten zu tauschen sind.
- Auch wenn man mit 1.3 feststellen kann, ob die eingegebene Matrix A singulär ist, kann dies bei Schritt 1 auch „übersehen“ werden (siehe dazu weiter unten, Beispiel (B)). Die Singularität von A kann dabei nachträglich mit Hilfe von 2.2 festgestellt werden.
- Falls z.B. $r_{nn} = 0$ und $c_n = 0$ gilt, so ist $x_n = 0$ auch eine Lösung der letzten Gleichung in $Rx = c$, d.h. wenn Algorithmus 1 wegen 2.2 abbricht, dann heißt dies nicht, dass $Ax = b$ keine Lösung hat! Die anderen r_{kk} sind dann ggf. ähnlich zu diskutieren, worauf hier aber verzichtet werden soll bzw. wozu auf den Algorithmus 2 verwiesen wird.

Algorithmus 2:

Gauß'sches Eliminationsverfahren mit Zeilen- und Spaltenpivotisierung, $\text{rg}(A) \leq n = m$

- **Schritt 1:**

Eingabe: $(A|b)$ sei eine reelle $(n \times (n+1))$ Matrix (Ausgangstableau)

Ausgabe: $(R|c) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist und nur Nulleinträge in den letzten $n - r$ Zeilen von R hat; Permutation π mit $Rx_\pi = c \Leftrightarrow Ax = b$; dabei ist $r = \text{rg}(A) = \text{rg}(R)$

Rechenschritte:

1.0: Setze $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) = (1, 2, \dots, n)$.

1.1: Für $j = 1, 2, \dots, n - 1$ und im aktuellen Tableau führe folgende Schritte 1.2 bis 1.6 durch:

1.2: Bestimme q und s mit

$$|a_{qs}| = \max_{\substack{j \leq i \leq n \\ j \leq k \leq n}} |a_{ik}|$$

1.3: Falls $|a_{qs}| = 0 \Rightarrow$ Abbruch!

mit: $r = \text{rg}(A) = j - 1$; $(R|c)$ als aktuellem Tableau; Ausgabe von R, c, π, r

1.4: a) Vertausche Zeile j mit Zeile q und danach Spalte j mit Spalte s im aktuellen Tableau
b) Vertausche in π die Werte $\pi(j)$ und $\pi(s)$

1.5: Für $i = j + 1, j + 2, \dots, n$ führe folgenden Schritt 1.6 durch:

1.6: Subtrahiere das $\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ -fache von Zeile j von Zeile i im aktuellen Tableau

Mit der Ausgabe R, c und π aus Schritt 1 führe die Rückwärtssubstitution durch:

- **Schritt 2:**

Eingabe: $(R|c) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist und nur Nulleinträge in den letzten $n - r$ Zeilen von R hat; Permutation π mit $Rx_\pi = c \Leftrightarrow Ax = b$; dabei ist $r = \text{rg}(R)$

Ausgabe: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Rx_\pi = c$

Rechenschritte:

2.1: Falls es ein $k \in \{r + 1, r + 2, \dots, n\}$ mit $c_k \neq 0$ gibt $\Rightarrow$ Abbruch! (es gibt keine Lösung)

2.2: Wähle $x_{\pi(r+1)}, \dots, x_{\pi(n)} \in \mathbb{R}$ beliebig.

2.3: Für $k = r, r - 1, \dots, 1$ berechne $x_{\pi(k)} = \frac{1}{r_{kk}} (c_k - r_{k,k+1}x_{\pi(k+1)} - \dots - r_{k,n}x_{\pi(n)})$

Bemerkungen:

- Das Verfahren ist auch auf den Fall $m \neq n$ übertragbar. Auf die genaue Formulierung sei dazu an dieser Stelle verzichtet, ein Beispiel dazu wird weiter unten gegeben.
- Bei der Führung des Vektors π ist besondere Sorgfalt geboten, da es durch Schritt 1.4 zu einer Veränderung der Reihenfolge der Variablen kommt. Leicht kann es dabei zu Verwechslungen kommen, die zu einer falschen Lösungsmenge führen!
- Auch diese Formulierungsvariante des Gauß-Algorithmus läßt sich leicht in ein Computerprogramm umsetzen. Die gleichzeitige Zeilen- und Spaltenpivotisierung mit dem betragsgrößten Matrixeintrag dient der Stabilität des Verfahrens.
- Die beiden Algorithmen lassen sich auch auf andere Körper übertragen. Zum Beispiel sind die darin vorkommenden Divisionen allgemeiner durch die Multiplikation mit dem Inversen zu ersetzen, d.h. statt mit $\frac{1}{r_{kk}}$ ist dann mit r_{kk}^{-1} zu multiplizieren (vgl. z.B. in Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p ist Primzahl).

Beispiele:

(A) Beispiel zum Algorithmus 1 für eine reguläre Matrix A : Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ -x_1 & & & & & & & = & -4 \\ & & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ & & & & - & x_3 & & = & -2 \end{array}$$

Die Abarbeitung von Schritt 1 des Algorithmus 1 sieht wie folgt aus

$$\begin{array}{l} j = 1 \\ \rightarrow r = 1 \\ \rightarrow \text{Zeilentausch entfällt} \\ \rightarrow (\text{Zeile } 2) - \frac{-1}{1} \cdot (\text{Zeile } 1) \\ \rightarrow (\text{Zeile } 3) - \frac{0}{1} \cdot (\text{Zeile } 1) \\ \rightarrow (\text{Zeile } 4) - \frac{0}{1} \cdot (\text{Zeile } 1) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ \\ j = 2 \\ \rightarrow r = 2 \\ \rightarrow \text{Zeilentausch entfällt} \\ \rightarrow (\text{Zeile } 3) - \frac{-1}{1} \cdot (\text{Zeile } 2) \\ \rightarrow (\text{Zeile } 4) - \frac{0}{1} \cdot (\text{Zeile } 2) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ \\ j = 3 \\ \rightarrow r = 3 \\ \rightarrow \text{Zeilentausch entfällt} \\ \rightarrow (\text{Zeile } 4) - \frac{-1}{1} \cdot (\text{Zeile } 3) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = (R|c) \end{array}$$

Wegen $\text{rg}(A) = \text{rg}(R) = 4 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(R|c)$ hat das System genau eine eindeutige Lösung. Diese berechnet man durch Rückwärtseinsetzen wie folgt mit Schritt 2:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{-1} = -1 \\ x_3 &= \frac{1}{1} \cdot (3 - (-1) \cdot x_4) = 2 \\ x_2 &= \frac{1}{1} \cdot (6 - 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4) = 5 \\ x_1 &= \frac{1}{1} \cdot (10 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4) = 4 \end{aligned}$$

(B) Beispiel zum Algorithmus 1 für eine singuläre Matrix A : Im Beispiel (A) sei die letzte Gleichung ersetzt durch

$$-x_3 + x_4 = -2$$

Schritt 1 von Algorithmus 1 liefert dann mit den gleichen Rechenschritten wie im Beispiel (A):

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (R|c)$$

Wegen $r_{44} = 0$ (und $c_4 \neq 0$) ist das System nicht lösbar, womit es in Schritt 2 zum Abbruch kommt.

(C) Beispiel zum Algorithmus 1 für eine reguläre Matrix A : Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ & & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & & & & & + & x_4 & = & -4 \\ & & & & 2x_3 & & & & = & -2 \end{array}$$

Die Abarbeitung von Schritt 1 des Algorithmus 1 sieht wie folgt aus

$$\begin{array}{l} j = 1 \\ \rightarrow r = 3 \\ \rightarrow \text{vertausche die Zeilen 1 und 3} \\ \rightarrow (\text{Zeile 2}) - \frac{0}{-2} \cdot (\text{neue Zeile 1}) \\ \rightarrow (\text{neue Zeile 3}) - \frac{1}{-2} \cdot (\text{neue Zeile 1}) \\ \rightarrow (\text{Zeile 4}) - \frac{0}{-2} \cdot (\text{neue Zeile 1}) \end{array} \quad \begin{array}{c} (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} j = 2 \\ \rightarrow r = 2 \\ \rightarrow \text{Zeilentausch entfällt} \\ \rightarrow (\text{Zeile 3}) - \frac{1}{-1} \cdot (\text{Zeile 2}) \\ \rightarrow (\text{Zeile 4}) - \frac{0}{-1} \cdot (\text{Zeile 2}) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} j = 3 \\ \rightarrow r = 4 \\ \rightarrow \text{vertausche die Zeilen 3 und 4} \\ \rightarrow (\text{neue Zeile 4}) - \frac{1}{2} \cdot (\text{neue Zeile 3}) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 6 \end{array} \right) = (R|c) \end{array}$$

Wegen $\text{rg}(A) = \text{rg}(R) = 4 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(R|c)$ hat das System genau eine eindeutige Lösung. Diese berechnet man durch Rückwärtseinsetzen wie folgt mit Schritt 2:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{6}{-\frac{1}{2}} = -12 \\ x_3 &= \frac{1}{2} \cdot (-2 - 0 \cdot x_4) = -1 \\ x_2 &= \frac{1}{-1} \cdot (-3 - 0 \cdot x_3 - (-2) \cdot x_4) = 27 \\ x_1 &= \frac{1}{-2} \cdot (-4 - 0 \cdot x_2 - 0 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4) = -4 \end{aligned}$$

(D) Beispiel zum Algorithmus 1 für eine singuläre Matrix A : Ersetzt man in einer der Koeffizientenmatrizen $(A|b)$ aus den Beispielen (A), (B) oder (C) die erste Spalte durch Nullvektor, dann kommt es bereits in Schritt 1 von Algorithmus zum Abbruch, da $|a_{r1}| = \max_{1 \leq i \leq 4} |a_{i1}| = 0$ die Abbruchbedingung in Teilschritt 1.3 erfüllt.

(E) Beispiel zum Algorithmus 2: Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ & & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & & & & & + & x_4 & = & -4 \\ -4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -10 \end{array}$$

Die Abarbeitung von Schritt 1 des Algorithmus 2 sieht wie folgt aus

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} j = 1 \\ \rightarrow q = 1, s = 1 \\ \rightarrow \text{kein Zeilen- und Spaltentausch} \\ \rightarrow (\text{Zeile 2}) - \frac{0}{4} \cdot (\text{Zeile 1}) \\ \rightarrow (\text{Zeile 3}) - \frac{-2}{4} \cdot (\text{Zeile 1}) \\ \rightarrow (\text{Zeile 4}) - \frac{-4}{4} \cdot (\text{Zeile 1}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} j = 2 \\ q = 2, s = 4 \rightarrow r = 2 \\ \rightarrow \text{kein Zeilentausch} \\ \rightarrow \text{vertausche Spalte 2 und 4} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} j = 2 \text{ (Fortsetzung)} \\ \rightarrow (\text{Zeile 3}) - \frac{\frac{3}{2}}{-2} \cdot (\text{Zeile 2}) \\ \rightarrow (\text{Zeile 4}) - \frac{0}{-2} \cdot (\text{Zeile 2}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (R|c)$$

Wegen $|a_{qs}| =$ für $j = 4$ endet Schritt 1. Die zugehörige Permutation π verändert sich mit den eben durchgeführten Rechnungen wie folgt:

$$\pi_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \pi_R$$

Wegen $\text{rg}(A) = \text{rg}(R) = 3 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(R|c)$ hat das System Lösungen. Diese berechnet man durch Rückwärtseinsetzen wie folgt mit Schritt 2:

$$\begin{aligned} x_{\pi(4)} &= x_2 = t \in \mathbb{R} \quad (x_2 \text{ kann beliebig gewählt werden!}) \\ x_{\pi(3)} &= x_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot x_{\pi(4)} \right) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \\ x_{\pi(2)} &= x_4 = \frac{1}{-2} \cdot (-3 - 0 \cdot x_{\pi(3)} + 1 \cdot x_{\pi(4)}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ x_{\pi(1)} &= x_1 = \frac{1}{4} \cdot (10 - 1 \cdot x_{\pi(2)} - 1 \cdot x_{\pi(3)} - 1 \cdot x_{\pi(4)}) = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}t \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist damit

$$\mathcal{L}(A, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(F) Beispiel zum Algorithmus 2: Folgendes lineare Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ -x_1 & & & & & & & = & -4 \\ & & -x_2 & & & & -2x_4 & = & -3 \end{array}$$

Die Abarbeitung von Schritt 1 des Algorithmus 2 sieht wie folgt aus

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} j = 1 \\ \rightarrow q = 3, s = 4 \\ \rightarrow \text{tausche Zeile 1 und 3,} \\ \rightarrow \text{tausche danach Spalte 1 und 4} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} j = 1 \text{ (Fortsetzung)} \\ \rightarrow (\text{Zeile 2}) - \frac{0}{-2} \cdot (\text{Zeile 1}) \\ \rightarrow (\text{Zeile 3}) - \frac{1}{-2} \cdot (\text{Zeile 1}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{17}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} j = 2 \\ q = 2, s = 4 \\ \rightarrow \text{kein Zeilentauch} \\ \rightarrow \text{tausche Spalte 2 und 4} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{17}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} j = 2 \text{ (Fortsetzung)} \\ \rightarrow (\text{Zeile 3}) - \frac{1}{-1} \cdot (\text{Zeile 2}) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right) = (R|c)$$

Die zugehörige Permutation π verändert sich mit den eben durchgeführten Rechnungen wie folgt:

$$\pi_A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) = \pi_R$$

Wegen $\text{rg}(A) = \text{rg}(R) = 3 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(R|c)$ hat das System Lösungen. Diese berechnet man durch Rückwärtseinsetzen wie folgt mit Schritt 2:

$$\begin{aligned} x_{\pi(4)} &= x_2 = 2t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (x_2 \text{ kann beliebig gewählt werden!}) \\ x_{\pi(3)} &= x_3 = \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{2} \cdot x_{\pi(4)} \right) = \frac{9}{2} - t \\ x_{\pi(2)} &= x_1 = \frac{1}{-1} \cdot (-4 - 0 \cdot x_{\pi(3)} - 0 \cdot x_{\pi(4)}) = 4 \\ x_{\pi(1)} &= x_4 = \frac{1}{-2} \cdot (-3 - 0 \cdot x_{\pi(2)} - 0 \cdot x_{\pi(3)} + 1 \cdot x_{\pi(4)}) = \frac{3}{2} - t \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist damit

$$\mathcal{L}(A, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

(G) Beispiel zum Algorithmus 2: Im Beispiel (E) sei die letzte Gleichung ersetzt durch

$$-4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -11$$

Mit den gleichen Rechenschritten wie für das Beispiel (E) erhält man hier

$$(R|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

womit Algorithmus 2 in Schritt 2.1 endet, d.h. das Gleichungssystem $Ax = b$ ist unlösbar. Es gilt $\text{rg}(A) = \text{rg}(R) = 3 \neq 4 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(R|c)$.

Fussnote: Diese Zusammenstellung ersetzt nicht den Besuch der Vorlesungen und Übungen! Die hier angegebenen Algorithmen sind die Darstellungen des Gauß-Algorithmus, wie Sie in der Vorlesung behandelt wurden. Es gibt aber auch andere Darstellungen, jede mit Vor- und Nachteilen. Ein etwas anderer Zugang ist in einer zweiten Zusammenfassung zum Gauß-Algorithmus zu finden, die ebenfalls auf der Internetseite zu dieser Vorlesung abgerufen werden kann. Ein Vorteil der hier vorgestellten Algorithmen ist ihre schnelle Umsetzbarkeit in ein Computerprogramm, ein Nachteil sind etwa die vielen verschiedenen Operationen, die jeweils durchgeführt werden müssen, insbesondere die vorübergehende Umbenennung der Variablen x_i , falls eine Vertauschung von Spalten durchgeführt werden muss. Ein weiterer Nachteil ist, dass sich die genannten Algorithmen nicht auf beliebige Körper übertragen lassen, sondern ausschließlich für die reellen Zahlen nutzbar sind. Zum Beispiel ist damit kein Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p ist Primzahl) lösbar, da in der Menge der Restklassen modulo p keine Division erklärt ist. Den Erstbesuchern dieser Vorlesung sei empfohlen, sich auch die zweite Darstellung einmal genauer anzusehen, die sich hauptsächlich an die Wiederholer richtet. Leicht sollte man Gemeinsamkeiten zwischen den Rechenmethoden feststellen, aber auch die wesentlichen Unterschiede. Alle Rechenmethoden liefern natürlich die gleichen Lösungsmenge, die jedoch ggf. etwas „anderes aussieht“. Davon überzeuge man sich zum Beispiel am Beispiel (F), das auch in der zweiten Zusammenfassung behandelt wird (dort als Beispiel (B) bezeichnet).