

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus - Teil 2

Ein System von $m \geq 1$ linearen Gleichungen mit $n \geq 1$ Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (1)$$

heißt lineares Gleichungssystem, wobei $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Das Gleichungssystem (1) heißt homogen, falls $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Andernfalls ist (1) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Die Lösungen $(x_1, \dots, x_n)$ sind Elemente des $\mathbb{R}^n$, die Gesamtheit aller Lösungen heißt Lösungsraum des Gleichungssystems. Dabei kann der Lösungsraum auch leer sein, d.h. das System (1) ist in diesem Fall unlösbar. Statt für $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}$ kann man (1) auch für $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{K}$ aus einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ formulieren, die folgenden Betrachtungen behalten über jedem Körper $\mathbb{K}$ ihre Gültigkeit.¹ Nachfolgend wird aber vereinfachend nur der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ angenommen.

Um die Rechnungen zur Lösung von (1) übersichtlich zu halten, ist es zweckmäßig, nur die zu (1) zugehörige Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zu betrachten bzw. die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$, wenn die rechte Seite b mit dazugenommen wird:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (2)$$

Mit Hilfe der Matrixmultiplikation kann man (1) abkürzend als $A \cdot x = b$ notieren, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Zwei Gleichungssysteme heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Eine wesentliche Strategie bei der Lösung linearer Gleichungssysteme ist es, durch geeignete Umformungen äquivalente Systeme zu erzeugen, die weniger Variablen haben, d.h. man eliminiert Variable. Die folgenden elementaren Umformungen ändern die Lösungsmenge nicht:

- Vertauschen zweier Gleichungen (Bezeichnung dieser Operation: p_{ik})
- Addition des λ -fachen der Gleichung k zur Gleichung i (Bezeichnung: $q_{ik}(\lambda)$)
- Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$ (Bezeichnung: $m_i(\lambda)$)

Bezeichnen $z_1, \dots, z_m$ die Zeilen der (erweiterten) Koeffizientenmatrix in (2), dann bewirken die genannten elementaren Umformungen folgendes:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \xrightarrow{p_{ik}} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \xrightarrow{q_{ik}(\lambda)} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_i + \lambda z_k \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \xrightarrow{m_i(\lambda)} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_i \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

¹Ggf. nach kleineren Anpassungen, z.B. ist in Formel (7) statt mit $\frac{1}{c_{kk}}$ in einem allgemeinen Körper $\mathbb{K}$ mit dem Inversen $(c_{kk})^{-1}$ zu multiplizieren, vgl. z.B. Restklassenkörper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p ist Primzahl. In $\mathbb{R}$ gilt aber eben per Definition $(c_{kk})^{-1} = \frac{1}{c_{kk}}$.

Bei der Elimination von Variablen hat man genauer zwischen Gaußelimination bzw. Gauß-Jordan-Elimination zu unterscheiden. Für die Freunde detaillierter Formeln seien diese beiden Verfahren kurz angegeben, die durch Anwendung der o.g. elementaren Zeilenoperationen erhalten werden: Dazu sei die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems gemäß (2) gegeben und es sei $a_{i_0 j_0} \neq 0$ für $1 \leq i_0 \leq m, 1 \leq j_0 \leq n$. Man sagt, die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array} \right) \quad (3)$$

entsteht durch Gaußelimination mit Pivotelement $a_{i_0 j_0}$, falls

- (a) $c_{ij} = a_{ij}, d_i = b_i$ für $i \leq i_0$ und
- (b) $c_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} \cdot a_{i_0 j_0}, d_i = b_i - \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \cdot a_{i_0 j_0}$ für $i > i_0$.

Das System (3) entsteht durch Gauß-Jordan-Elimination mit Pivotelement $a_{i_0 j_0}$, falls

- (a) $c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{i_0 j_0}}, d_i = \frac{b_i}{a_{i_0 j_0}}$ für $i = i_0$ und
- (b) $c_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} \cdot a_{i_0 j_0}, d_i = b_i - \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \cdot a_{i_0 j_0}$ für $i \neq i_0$.

Eine Variable x_{r_i} heißt Leitvariable der i -ten Gleichung in (1)/(2), falls $a_{ir_i} \neq 0$ und $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq j \leq r_i - 1$. Die Idee des Lösungsverfahrens besteht darin, das Gleichungssystem so umzuformen, dass die Leitvariablen in den Gleichungen verschieden sind. Die Lösung wird dann dadurch bestimmt, indem alle Nicht-Leitvariablen schrittweise als freie Parameter angesehen werden und die Leitvariablen schrittweise aus den Gleichungen bestimmt werden. In der Sprache der Matrizen wird daher die Überführung der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in eine Matrix $(C|d)$ in Zeilenstufenform angestrebt. Das dazu verwendete und hier vorgestellte Verfahren heißt Gauß-Algorithmus.

Eine Matrix ist dabei anschaulich in Zeilenstufenform, wenn die Anzahl der Anfangsnulzen von Zeile zu Zeile zunimmt. Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(C|d)$ hat also die folgende Form:

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & c_{1r_1} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2r_2} & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{k,r_k} & \dots & c_{kn} & d_k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_{k+1} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_m \end{array} \right) \quad (4)$$

Sind dabei die Stufenspalten zusätzlich Einheitsvektoren (d.h. $(C|d)$ entsteht durch Gauß-Jordan-Elimination), dann ist die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform. Mit Hilfe der Zeilenstufenform läßt sich der Rang einer Matrix definieren: Der Rang einer Matrix A (übliche Notationen dafür sind $\text{rg}(A)$, $\text{rang}(A)$ oder $\text{rank}(A)$) ist die Anzahl der Stufen in einer zugehörigen Zeilenstufenform von A .

Nachfolgend wird der Lösungsraum $\mathcal{L}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ des linearen Gleichungssystems (1) mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A|b)$ betrachtet. Die Einträge $d_{k+1}, \dots, d_m$ in (4) sind entscheidend für die Frage, ob das lineare Gleichungssystem (1) überhaupt eine Lösung hat. Gibt es ein $d_i \neq 0$ mit $k+1 \leq i \leq m$, dann lautet die i -te Gleichung $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = d_i \neq 0$. Diese Bedingung kann offensichtlich kein $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllen, es folgt $\mathcal{L}(A, b) = \emptyset$. Gilt dagegen $d_{k+1} = \dots = d_m = 0$, dann hat das System mindestens eine Lösung. Ein Lösbarkeitskriterium ist damit:

$$\mathcal{L}(A, b) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) \quad (5)$$

Im diesem Fall kann man aus (4) durch „Rückwärtseinsetzen“ beginnend mit der k -ten Zeile den Lösungsraum $\mathcal{L}(A, b)$ berechnen. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass in (4) $r_1 = 1, r_2 = 2, \dots, r_k = k$ gilt, d.h. die

ersten k Spalten sind Stufenspalten, und die letzten $r := n - k$ Spalten haben unterhalb der k -ten Zeile nur Nulleinträge. Damit sind $x_{k+1}, \dots, x_n$ freie Variablen, d.h. sie können beliebige Werte annehmen. Die Variablen $x_1, \dots, x_k$ werden als gebundene Variablen bezeichnet, die eindeutig dadurch festgelegt sind, welche Werte für die freien Variablen gewählt wurden.

Die Berechnung der Lösungen erfolgt dann wie folgt: Man wählt $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ als Parameter, und setzt

$$x_{k+1} = \lambda_1 \quad , \quad x_{k+2} = \lambda_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = \lambda_r \quad (6)$$

Zur Berechnung der $x_1, \dots, x_k$ beginnt man mit der k -ten Gleichung

$$c_{kk}x_k + c_{k,k+1}\lambda_1 + \dots + c_{kn}\lambda_r = d_k.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{c_{kk}}(d_k - c_{k,k+1}\lambda_1 - \dots - c_{kn}\lambda_r) \\ &= z_{kk}d_k + h_{k,1}\lambda_1 + \dots + h_{k,r}\lambda_r \end{aligned} \quad (7)$$

Setzt man dies in die $(k-1)$ -te Gleichung ein, dann erhält man analog

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= \frac{1}{c_{k-1,k-1}}(d_{k-1} - c_{k-1,k}x_k - c_{k-1,k+1}\lambda_1 - \dots - c_{k-1,n}\lambda_r) \\ &= z_{k-1,k-1}d_{k-1} + z_{k-1,k}d_k + h_{k-1,1}\lambda_1 + \dots + c_{k-1,r}\lambda_r \end{aligned} \quad (8)$$

Führt man auf diese Weise fort, dann erhält man im letzten Schritt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{c_{11}}(d_1 - c_{12}x_2 - \dots - c_{1k}x_k - c_{1,k+1}\lambda_1 - \dots - c_{1n}\lambda_r) \\ &= z_{11}d_1 + z_{12}d_2 + \dots + z_{1k}d_k + h_{11}\lambda_1 + \dots + h_{1,r}\lambda_r \end{aligned} \quad (9)$$

Die in (7) bis (9) auftretenden Zahlen $z_{ij} \in \mathbb{R}$ und $h_{ij} \in \mathbb{R}$ ergeben sich, indem die entsprechenden Werte für $x_1, \dots, x_k$ ausmultipliziert und die entstehenden Summanden nach den Werten $d_1, \dots, d_k, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ sortiert werden. Damit kann man die von $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ abhängige Lösung wie folgt darstellen (unter der Annahme $r_i = i$, $i = 1, \dots, k$ in (4)):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k z_{1j}d_j \\ \sum_{j=2}^k z_{2j}d_j \\ \sum_{j=3}^k z_{3j}d_j \\ \vdots \\ z_{kk}d_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:s^*} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \\ \vdots \\ h_{k1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:s_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ \vdots \\ h_{k2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:s_2} + \dots + \lambda_r \underbrace{\begin{pmatrix} h_{1r} \\ h_{2r} \\ h_{3r} \\ \vdots \\ h_{kr} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:s_r} \quad (10)$$

Für das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ ist offensichtlich auch $d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0$, womit $s^* = 0$ folgt. Ist $\text{rg}(A) = k < n$, so hat die Lösungsmenge die Gestalt

$$\mathcal{L}(A, 0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_r s_r, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}. \quad (11)$$

Sind $x, y \in \mathcal{L}(A, 0)$, so sind $x + y$ und μx für beliebiges $\mu \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösungen des homogenen Systems $Ax = 0$. Ein homogenes lineares Gleichungssystem ist immer lösbar, denn es gibt insbesondere stets die triviale Lösung $0 \in \mathcal{L}(A, 0)$. Falls $\text{rg}(A) = n$ gilt, so ist $x = 0$ die einzige Lösung des Systems [d.h. $\mathcal{L}(A, 0) = \{0\}$].

Ist das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b \neq 0$ lösbar, so ist $s^* \neq 0$ für $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ eine *spezielle Lösung* des Systems. Die Lösungsmenge

$$\mathcal{L}(A, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = s^* + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_r s_r, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\} = s^* + \mathcal{L}(A, 0) \quad (12)$$

ist also die Summe einer speziellen Lösung s^* und der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

Beispiele:

(A) Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ -x_1 & & & & & & & = & -4 \\ & & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ & & & & - & x_3 & & = & -2 \end{array}$$

Mittels Gauß-Algorithmus überführt man die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform $(C|d)$:

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{q_{21}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{q_{32}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{q_{43}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = (C|d) \end{aligned}$$

Wegen $\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = 4 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(C|d)$ hat das System genau eine eindeutige Lösung. Diese berechnet man durch Rückwärtseinsetzen wie folgt: Aus der letzten Zeile des Systems $Cx = d$ folgt $x_4 = -1$. Einsetzen in die dritte Gleichung und Umstellung nach x_3 liefert $x_3 = 3 - (-1) \cdot (-1) = 2$. Damit folgt $x_2 = 6 - x_3 + x_4 = 6 - 2 + 1 = 5$, womit sich schließlich $x_1 = 10 - x_2 - x_3 + x_4 = 10 - 5 - 2 + 1 = 4$ ergibt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist damit

$$\mathcal{L}(A, b) = \{(4, 5, 2, -1)^T\}.$$

Alternativ kann man die reduzierte Zeilenstufenform verwenden:

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{q_{21}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{q_{32}(1), q_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{q_{43}(1), q_{23}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{q_{34}(-1), q_{24}(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{m_4(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) = (C^*|d^*) \end{aligned}$$

Der Vorteil der reduzierten Zeilenstufenform ist offensichtlich, kann man die Lösung $x = (4, 5, 2, -1)^T$ doch in diesem Fall ohne weitere Rechnungen direkt ablesen.

(B) Es sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ -x_1 & & & & & & & = & -4 \\ & & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \end{array}$$

zu lösen, das sich aus Beispiel (A) durch Streichung der letzten Gleichung ergibt. So ist auch beim Gauß-Algorithmus lediglich die letzte Zeile zu streichen. Die Zeilenstufenform $(C|d)$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ ist damit auch bereits bekannt:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) = (C|d)$$

Wegen $\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = 3 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(C|d)$ hat auch dieses System eine Lösung. Da die vierte Spalte keine Stufenspalte ist, kann die Variable x_4 beliebig gewählt werden, also z.B. $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $x_3 = 3 + \lambda$, damit $x_2 = 3 - 2\lambda$ und schließlich $x_1 = 4$. Als Lösungsmenge erhält man

$$\mathcal{L}(A, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = (4, 3, 3, 0)^T + \lambda \cdot (0, -2, 1, 1)^T \right\}.$$

Als reduzierte Zeilenstufenform $(C^*|d^*)$ von $(A|b)$ erhält man hier:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) = (C^*|d^*),$$

woraus für beliebiges $x_4 \in \mathbb{R}$ die Lösung wieder einfach abgelesen werden kann.

(C) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ -x_1 & & & & & = & -4 \\ & & - & x_2 & & = & -3 \\ & & & & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Da dieses aus (A) durch Streichung der x_4 -Spalte entsteht, ist auch die Zeilenstufenform $(C|d)$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ aus den obigen Rechnungen ablesbar, nämlich:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = (C|d)$$

Wegen $\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = 3 \neq 4 = \text{rg}(A|b) = \text{rg}(C|d)$ hat das Gleichungssystem keine Lösung.

(D) Noch ein Beispiel zum Rückwärtseinsetzen zur Bestimmung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems. Dazu sei die Zeilenstufenform

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

der erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben. Aus der letzten Zeile liest man $x_6 = -1$ ab, woraus $x_5 = 3 - 2 \cdot x_6 = 5$ folgt. Die Variablen x_3 und x_4 können beliebig gewählt werden, zum Beispiel $x_3 = \lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $x_4 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Damit folgt $x_2 = 2 - (-1) \cdot x_2 - x_3 - x_6 = 3 + \lambda_1 - \lambda_2$. Aus der ersten Zeile folgt dann $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 - x_5 = -10 - 5\lambda_1 + 2\lambda_2$. Die Lösungsmenge ist damit

$$\mathcal{L}(A, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^6 \mid x = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Fussnote: Diese Zusammenstellung ersetzt nicht den Besuch der Vorlesungen und Übungen! Sie soll aber vor allem den Wiederholern den Anschluss an die in früheren Semestern verwendeten Notationen und Bezeichnungen geben, wozu hier auch Notationen und Bezeichnungen aus früheren Vorlesungen an der BTU Cottbus zur Linearen Algebra für Studiengänge der Richtungen Informatik, IMT und eBusiness verwendet wurden, wie sie zum Beispiel in den Vorlesungsskripten

- B. Martin: „Mathematik IT-2: Lineare Algebra“, Sommersemester 2012
- E. Köhler: „Mathematik IT 2“, Vorlesungsskript, Sommersemester 2007
- W. Hochstättler: „Lineare Algebra (für Informatiker und Informations- und Medientechniker)“, Wintersemester 2001/2002

zu finden sind. Den Erstbesuchern sollen ggf. ergänzend zur Vorlesung andere Sichtweisen zugänglich gemacht werden. Darüber hinaus soll diese Übersicht ergänzend zur Übung weitere einfache, einführende Beispiele geben.