

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Dienstag, 30.04.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 2.1 (8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) Eine Zahl ist genau dann durch 21 teilbar, wenn sie durch 7 und 3 teilbar ist.
- (b) Eine Zahl ist genau dann durch 72 teilbar, wenn sie durch 24 und 3 teilbar ist.
- (c) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $9 \mid (a + 2b)$ genau dann, wenn $9 \mid (100a + 2b)$.
- (d) Gilt für ganze Zahlen $a_1 \mid b_1$ und $a_2 \mid b_2$, so gilt auch $a_1 a_2 \mid b_1 b_2$.
- (e) Gilt für ganze Zahlen $a_1 a_2 \mid b_1 b_2$, so gilt auch $a_1 \mid b_1$ und $a_2 \mid b_2$.

Aufgabe 2.2 (6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $a := 2716065$ und $b := 581931$. Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Rechnungen an!
- (b) Bestimmen Sie mit dem (erweiterten) Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(a, b)$ von $a := 1896$ und $b := 332$. Bestimmen Sie außerdem Koeffizienten $s, t \in \mathbb{R}$, sodass $\text{ggT}(a, b) = sa + tb$ gilt. Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Rechnungen an!

Aufgabe 2.3 (10 Punkte)

Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Restklasse $[a]$ von a (modulo n) besteht aus allen ganzen Zahlen, die bei Division durch n den gleichen Rest ergeben wie a , d.h. $[a] := \{b \in \mathbb{Z} \mid b \bmod n = a \bmod n\}$. Die Menge der Restklassen modulo n sei mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ bezeichnet.

- (a) Ermitteln Sie die Multiplikationstafeln von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Gleichung $[a] \cdot [x] = [b]$ jeweils in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bzw. in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bei beliebig gegebenen von $[0]$ verschiedenen Restklassen $[a], [b] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bzw. $[a], [b] \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
- (b) Stellen Sie die Multiplikationstafel der von $[0]$ verschiedenen Restklassen $[a] \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ auf, für die a und 8 teilerfremd sind. Begründen Sie mit Hilfe der Multiplikationstafel, dass die Gleichung $[a] \cdot [x] = [b]$ bei beliebig gegebenen von $[0]$ verschiedenen Restklassen $[a], [b] \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(8, a) = 1$ und $\text{ggT}(8, b) = 1$ eindeutig lösbar ist. Geben Sie außerdem die eindeutig bestimmten Lösungen $[x], [y] \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\text{ggT}(8, x) = 1, \text{ggT}(8, y) = 1$ der Gleichungen $[3] \cdot [x] = [7]$ und $[7] \cdot [y] = [3]$ an.

Aufgabe 2.4 (5 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. In der Übung wurde der Chinesische Restsatz sowie ein Verfahren zur Lösung eines Systems linearer Kongruenzen $x \equiv a \bmod m$ und $x \equiv b \bmod n$ vorgestellt. Lösen Sie das System

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \bmod 58 \\x &\equiv 4 \bmod 93\end{aligned}$$

und bestimmen Sie die größte negative Lösung.