Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 3 - Abgabe bis Dienstag, 07.05.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Hinweise:

- **Wegen des Maifeiertages entfällt die Übung am Mittwoch, den 01. Mai 2013. Die Teilnehmer(innen) dieser Übungsgruppe verteilen sich bitte auf die Gruppen 2, 3 oder 5. Ein Ausweich auf die Gruppe 4 ist aus Kapazitätsgründen NICHT möglich!**
- **Als Ersatz für die durch den Himmelfahrtstag (09. Mai) entfallenden Übungen (betroffene Gruppen: 2, 3 und 4) bieten wir folgenden Termin an: Mittwoch, den 08. Mai 2013 von 15:30 bis 17:00 Uhr im LG 1A, Raum 304.**

Aufgabe 3.1 (10 Punkte)

Eine Restklasse $[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat ein multiplikativ inverses Element $[a]^{-1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, falls $[a] \cdot [a]^{-1} = [1]$ gilt. Theoretisch kann man die Invertierbarkeit mit Hilfe einer Multiplikationstafel überprüfen, was aber praktisch wegen des allgemein hohen Rechenaufwandes nicht ratsam ist. Man kann zeigen, dass $[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann multiplikativ invertierbar ist, wenn die Zahlen a und n teilerfremd sind, d.h. $\mathrm{ggT}(n, a) = 1$.

(a) Bestimmen Sie die inverse Restklasse von $[3] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und $[6] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Stellen Sie dazu die Multiplikationstafel von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ auf, und lesen Sie anschließend $[3]^{-1}$ bzw. $[6]^{-1}$ daraus ab.

(b) Untersuchen Sie, ob die Restklassen $[51] \in \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$ bzw. $[35] \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ multiplikativ invertierbar sind und berechnen Sie ggf. die inverse Restklasse. Verwenden Sie dazu den erweiterten Euklidischen Algorithmus und die oben genannte Eigenschaft.

(c) Wie kann man das Ergebnis für $[51] \in \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$ in (b) *ohne* Verwendung des Euklidischen Algorithmus begründen?

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Ein Kartenspiel aus 56 nummerierten Karten wird in 7 Zeilen ausgelegt. Dann wird ein Zuschauer gebeten, sich eine Karte auszusuchen und die Spalte zu merken, in der die Karte liegt. Die ausgesuchte Karte liegt in Spalte 4. Anschließend werden die Karten in der Reihenfolge eingesammelt, in der sie sich zu Anfang des Spieles befunden haben, und danach in 8 Zeilen ausgelegt. Der Zuschauer wird nun gefragt, in welcher Spalte sich die zuvor ausgesuchte Karte jetzt befindet. Die Karte liegt nun in Spalte 2. Welche der 56 Karten hat sich der Zuschauer ausgesucht?

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Kongruenzgleichung $108x \equiv 36 \bmod 330$.

(Aufgaben 3.4 und 3.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 3.4 (5 Punkte)

Gegeben seien die *letzten* zwei Zeilen eines Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 152 &= 3 \cdot 48 + 8 \\ 48 &= 6 \cdot 8 + 0 \end{aligned}$$

Ergänzen Sie zwei darüberliegende Zeilen so, dass diese vom Verfahren her passen und die Ausgangszahlen $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 8$ zwischen 1000 und 2500 liegen. Geben Sie alle möglichen Paare (a, b) an, die diesen Rechenschritten genügen.

Aufgabe 3.5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie Zahlen $s, t, u \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(96, 165, 105) = s \cdot 96 + t \cdot 165 + u \cdot 105$.
(*Hinweis: Berechnen Sie zuerst* $ggT(165, 105)$ *und dann* $ggT(96, ggT(165, 105))$.)