

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Dienstag, 14.05.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Hinweis: Als Ersatz für die durch den Himmelfahrtstag (09. Mai) entfallenden Übungen (betroffene Gruppen: 2, 3 und 4) bieten wir folgenden Termin an: Mittwoch, den 08. Mai 2013 von 15:30 bis 17:00 Uhr im LG 1A, Raum 304.

Aufgabe 4.1 (11 Punkte)

Die Hashfunktion $h : S \rightarrow M$ bildet eine große Menge Schlüssel S auf eine kleine Menge M von Speicheradressen ab. Der Fall $|S| > |M|$ impliziert, dass Adresskollisionen beim Hashing unvermeidlich sind, d.h. Elemente aus S haben den gleichen Hashwert, was aber auch im Fall $|S| \leq |M|$ auftreten kann. Adresskollisionen sind bei der Konstruktion einer Hashfunktion zu berücksichtigen, bei einer „guten“ Hashfunktion werden solche Kollisionen selten vorkommen. In Anwendungen dient der Hashwert z.B. einer Zeichenkette als dessen nahezu eindeutige Kennzeichnung, etwa vergleichbar mit einem Fingerabdruck.

Eine wichtige Anwendung in der Informatik sind z.B. Hashtabellen, die benutzt werden, um Daten in großen Datenmengen zu finden. Die Hashfunktion h definiert zu jedem Datum einen Hashwert, der als Index in der Tabelle verwendet wird. Ein Datum mit dem Schlüssel $x \in S$ wird in der Tabelle nicht an Position x , sondern an der Position $h(x) \in M$ gespeichert. Kommt es zu einer Kollision, d.h. $h(x) = h(y)$ für $x \neq y$, so kann diese mit verschiedenen Methoden aufgelöst werden.

Einfachste Methode für die Kollisionsauflösung ist dabei das sogenannte Chaining, wo in der Hashstabelle an jeder Stelle eine Liste steht. Tritt beim Einfügen eines Elements eine Kollision auf, dann wird der neue Eintrag in die dortige Liste eingetragen. Bei der Suche nach einem Eintrag muss dann nach Berechnen des Hashwertes die entsprechende Liste durchsucht werden. Die einfachste Form einer Hashfunktion mit Chaining ist zum Beispiel für $S \subseteq \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$h : S \rightarrow M \quad \text{mit} \quad h(x) := x \bmod n, \quad (1)$$

wobei $n \geq 2$ eine fest gewählte, natürliche Zahl ist.

Eine andere Methode ist das lineare Sondieren, wo die Adresskollision durch das Testen von Alternativadressen aufgelöst wird. Dazu erweitert man z.B. die Hashfunktion h aus (1) zu einer Hashfunktion

$$H : S \times M \rightarrow M \quad \text{mit} \quad H(x, j) := (h(x) + j) \bmod n, \quad (2)$$

wobei das zweite Argument j die Anzahl der notwendigen Sondierungen bis zum Finden eines noch nicht belegten Hashwertes ist.

Gegeben seien die Vornamen

$\{\text{Anna}, \text{Charlotte}, \text{Elli}, \text{Heinz}, \text{Ida}, \text{Kurt}, \text{Liesbeth}, \text{Marie}, \text{Otto}, \text{Paul}, \text{Werner}\},$

die der Reihe nach in eine Liste mit den Einträgen $\{0, 1, \dots, n-1\}$ einzuordnen sind. Als Schlüssel seien die Buchstaben des Alphabets $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ verwendet, die wir mit den Zahlen $0, 1, 2, \dots, 23, 24, 25$ identifizieren. Der Schlüssel eines Namens ist also die Zahl, die seinem Anfangsbuchstaben entspricht.

- (a) Berechnen Sie jeweils für $n = 11$ und $n = 12$ die Hashtabelle mit Chaining bzgl. der Funktion h aus (1) sowie die Hashtabelle mit linearer Sondierung bzgl. der Funktion H aus (2). Geben Sie dabei in hinreichendem Umfang auch Zwischenrechnungen bzw. Begründungen an, warum einem Namen der jeweilige Hashwert zugeordnet wird. Die berechnete Hashtabelle mit linearer Sondierung soll dabei so aufgeschrieben werden, dass neben dem Hashwert und dem zugehörigen Vornamen auch die Anzahl der Sondierungen notiert wird.

- (b) Die Hashfunktion für lineares Sondieren gemäß (1) kann verallgemeinert werden zu

$$H_c : S \times M \rightarrow M \quad \text{mit} \quad H_c(x, j) := (h(x) + c \cdot j) \bmod n, \quad (3)$$

wobei $c \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ gilt. Berechnen Sie zu obigen Daten für $n = 11$ die Hashtabelle bzgl. H_4 . Warum ist es für $n = 12$ nicht möglich, mittels H_4 eine Hashtabelle zu berechnen?

Aufgabe 4.2 (8 Punkte)

Entscheiden Sie durch Überprüfung der Gruppenaxiome, ob die nachfolgenden Mengen G zusammen mit der angegebenen Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ Gruppen bzw. kommutative Gruppen sind. Ist dies der Fall, dann geben Sie ggf. neutrale und inverse Elemente an.

- (a) $G := \mathbb{R}$ mit $a \circ b := \frac{a}{b}$ für $a, b \in G$
- (b) $G := \text{Pot}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ (Potenzmenge einer Menge $A \neq \emptyset$) mit $X \circ Y := X \cap Y$ für $X, Y \in G$
- (c) $G := \text{Pot}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ (Potenzmenge einer Menge $A \neq \emptyset$) mit $X \circ Y := X \cup Y$ für $X, Y \in G$
- (d) $G := \left\{ f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$ mit $f \circ g := f + g$ für $f, g \in G$

Aufgabe 4.3 (6 Punkte)

Es seien $M := \{e, a, b, c\}$ eine Menge mit vier Elementen und $G := (M, \circ)$ die durch die Gruppentafel

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

definierte kommutative Gruppe. Zwei Gruppen $G = (M, \circ)$ und $H = (N, \bullet)$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ gibt mit $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ für alle $x, y \in M$. Zueinander isomorphe Gruppen unterscheiden sich nur durch die Namensgebung ihrer Elemente und sind strukturell identisch.

- (a) Bestimmen Sie durch Angabe einer geeigneten Gruppentafel eine von G verschiedene kommutative Gruppe über M mit neutralem Element e , die zu G isomorph ist, und geben Sie explizit einen Isomorphismus $\varphi : M \rightarrow M$ an.
- (b) Definieren Sie eine kommutative Gruppe über M mit dem neutralen Element e , die nicht zu G isomorph ist, und beweisen Sie die Nichtisomorphie.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit beliebiger Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ und es gelte $a \circ a = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element sei.

- (a) Weisen Sie nach, dass $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.
- (b) Geben Sie zwei verschiedene Beispiele für derartige Gruppen $(G, \circ)$ an.