Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 5 - Abgabe bis Dienstag, 21.05.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 5.1 (6 Punkte)

Gegeben sei die Menge V der Vornamen

$$V := \{\text{Ida , Ina , Ines , Inge , Irma , Irmgard , Jan , Jana , Janek , Jannes}\}$$

die der Reihe nach in eine Liste mit den Einträgen $\{0, 1, \ldots, 52\}$ eingeordnet werden sollen. Würden die Schlüssel gemäß Aufgabe 4.1 verwendet, so kommt es von vornherein zu Kollisionen, die aufwändig aufgelöst werden müssen.

Leiten Sie ein einfaches Konzept für die Schlüsselmenge S her, sodass der Schlüssel eines Namens Groß- und Kleinschreibung sowie die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben eines Namens berücksichtigt (der Buchstabe ß soll dabei berücksichtigt werden; Umlaute werden wie folgt interpretiert: Ä als Ae, ä als ae, ö als oe usw.; alle nicht im Alphabet vorkommenden Buchstaben und Sonderzeichen können ignoriert werden) und die Gefahr von Kollisionen bzgl. der Hashfunktion h aus Aufgabe 4.1.(1) reduziert wird. Bestimmen Sie mit diesem Schlüsselsystem die Hashwerte der obigen Vornamen zur Einsortierung in die o.g. Liste, wobei zur Auflösung möglicher Kollisionen die Hashfunktion H aus Aufgabe 4.1.(2) verwendet werden soll. Dabei sei angenommen, dass die Hashtabelle noch leer ist, d.h. es wurden noch keine anderen Einträge vorgenommen. (Hinweis: Verwenden Sie ausschließlich Methoden, die den bisher in der Vorlesung behandelten Themen entsprechen!)

Aufgabe 5.2 (7 Punkte)

Die Funktionen $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_1(x) := x \quad , \quad f_2(x) := -x \quad , \quad f_3(x) := f_3(x) := \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f_4(x) := -\frac{1}{x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass durch $\big(f_i \circ f_j\big)(x) := f_i\big(f_j(x)\big)$ eine Gruppe $G_1 = \big(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ\big)$ definiert ist. Stellen Sie die zugehörige Gruppentafel auf und geben Sie das neutrale Element der Gruppe an.

(b) Weisen Sie nach, dass die Gruppen G_1 und $G_2 = \big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +\big)$ nicht isomorph sind, indem Sie zeigen, dass in G_1 jedes Element zu sich selbst invers ist, d.h. $f_i \circ f_i$ ist für $i = 1, 2, 3, 4$ das neutrale Element, während diese Eigenschaft in G_2 nicht erfüllt ist.

(*Hinweis zu (a): Auf den Nachweis der Assoziativität kann verzichtet werden, da für drei Funktionen f_i, f_j, f_k stets gilt* $\big((f_i \circ f_j) \circ f_k\big) = f_i\big(f_j(f_k(x))\big) = \big(f_i \circ (f_j \circ f_k)\big)(x)$.)

Aufgabe 5.3 (3 Punkte)

Eine nichtleere Teilmenge $U \subset G$ einer Gruppe $(G, \circ)$ heißt Untergruppe von G, wenn für alle $a, b \in U$ stets $a \circ b \in U$ und $a^{-1} \in U$ gilt. Beweisen Sie das sogenannte Untergruppenkriterium: U ist genau dann Untergruppe von $(G, \circ)$, wenn für alle $a, b \in U$ gilt $a \circ b^{-1} \in U$.

(Aufgaben 5.4 und 5.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 5.4 (9 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

(a) $U := \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$

(b) $U := \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$

(c) Es seien U_1 und U_2 Untergruppen von $(G, \circ)$ bzgl. einer beliebigen Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$. Dann ist $U_1 \cap U_2$ ebenfalls Untergruppe von G.

(d) Es seien U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von $(G, \circ)$ bzgl. einer beliebigen Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$. Dann ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls Untergruppe von G.

(e) Es seien U_1 und U_2 Untergruppen von $(G, \circ)$ bzgl. einer beliebigen Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$. Außerdem gelte $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$. Dann ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls Untergruppe von G.

Aufgabe 5.5 (8 Punkte)

(a) Schreiben Sie die Elemente der Permutationsgruppe S_3 in Zyklenschreibweise auf. Geben Sie die Verknüpfungstafel für S_3 an (in Zyklenschreibweise). Bestimmen Sie das inverse Element der Permutation $(123) \in S_3$, und lösen Sie die Gleichung $(23) \circ \pi = (12)$ mit $\pi \in S_3$. Ist die Gruppe S_3 zyklisch?

(b) Falls Sie feststellen, dass die Gruppe S_3 zyklisch ist, dann geben Sie ein Beispiel für eine azyklische Gruppe an. Geben Sie andernfalls ein Beispiel für eine zyklische Gruppe an. (*Hinweis: Die in der Übung behandelten Beispiele (vgl. Aufgabe Ü5.4) werden dabei nicht akzeptiert, ebenso wenig die in der Vorlesung behandelten Beispiele bzgl. der Permutationsgruppen S_n!*)

Hinweis/Vereinbarung: Bei der Verknüpfung $x \circ y$ soll zuerst y und dann x ausgeführt werden. Stellen Sie die Verknüpfungstafel aus (a) so auf, dass für die Verknüpfung $x \circ y$ die Permutation x in der Zeile bzw. y in der Spalte der Tafel steht, d.h.

$\circ$	$\dots$	y	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$	
x	$\dots$	$x \circ y$	$\dots$
$\vdots$			

.