

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 6 - Abgabe bis Dienstag, 28.05.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 6.1 (7 Punkte)

- (a) Sei $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : G \rightarrow G$ mit $f(x) := x^{-1}$ ein Isomorphismus ist.
- (b) Sei f ein Homomorphismus von einer Gruppe $(X, \circ)$ in eine Gruppe $(Y, \bullet)$ und g ein Homomorphismus von $(Y, \bullet)$ in eine Gruppe $(Z, *)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $h : X \rightarrow Z$ mit $h(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$ ein Homomorphismus von $(X, \circ)$ in $(Z, *)$ ist.
- (c) Sei π eine Permutation. Mit π^{-1} sei die inverse Permutation bezeichnet und mit π^2 die Verknüpfung $\pi \circ \pi$. Gilt die Gleichung $(\pi^2)^{-1} = (\pi^{-1})^2$?

Aufgabe 6.2 (6 Punkte)

Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element e , $a \in G$, $k \in \mathbb{N}$ und $H = \{a, a^2, \dots, a^k\}$. Es gelte $a^k = e$ und $a^i \neq e$ für alle i mit $1 \leq i < k$. Zeigen Sie, dass H eine endliche, kommutative, zyklische Untergruppe von G mit k Elementen ist.

Aufgabe 6.3 (5 Punkte)

Auf $\mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ seien zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\circ$ definiert durch

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad \text{bzw.} \quad (a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) := (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \circ)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist. Ist diese Struktur auch ein Körper?

Aufgabe 6.4 (6 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ seien zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\circ$ definiert durch

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{bzw.} \quad (a, b) \circ (c, d) := (ac - bd, ad + cb)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ ein Körper ist.

Aufgabe 6.5 (8 Punkte)

Die Restklassen modulo p bilden einen Körper $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, wenn p eine Primzahl ist. Der Einfachheit halber werden die Restklassen $[x]$ hier einfach durch x notiert, wobei $x \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ gelte.

- (a) Lösen Sie die Gleichung $3 \cdot x = 4$ im Körper $\mathbb{F}_p$ für $p \in \{5, 7, 11, 13\}$.
- (b) Besitzt die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ Lösungen in den Körpern $\mathbb{F}_p$, $p \in \{2, 3, 5, 7\}$? Geben Sie alle Lösungen an, oder weisen Sie die Unlösbarkeit der Gleichung nach.