

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 04.06.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 7.1 (6 Punkte)

Berechnen Sie in den Polynomringen $\mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ das Produkt

(a) $(x^8 + x^5 + x^2 + 1) \cdot (x^7 + x^6 + x^3)$

und führen Sie die folgenden Divisionen mit Rest durch

(b) $(x^7 + x^6 + 1)/(x^3 + x + 1)$

(c) $(x^7 + x^6 + x)/(x^3 + x + 1)$

Aufgabe 7.2 (5 Punkte)

Im Polynomring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ seien die folgenden Polynome betrachtet:

$$x + 1, \quad x^2 + 1, \quad x^2 + x, \quad x^2 + x + 1$$

Stellen Sie die Tafeln für die Addition und Multiplikation dieser Polynome auf.

Aufgabe 7.3 (5 Punkte)

Gegeben sei $p \in K[x]$ mit $p(x) := x^2 - 2$. Bestimmen Sie die Nullstellen von p , wobei folgende Fälle für den Polynomring $K[x]$ zu unterscheiden sind:

(a) $K[x] = \mathbb{R}[x]$

(b) $K[x] = \mathbb{Q}[x]$

(c) $K[x] = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[x]$ für $n \in \{7, 8, 14\}$

Aufgabe 7.4 (6 Punkte)

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ mit

(a) $f(x) := x^{11} + 3x^{10} + 6x^9 + 11x^8 + 18x^7 + 28x^6 + 39x^5 + 53x^4 + 48x^3 + 41x^2 + 30x + 17$

$$g(x) := x^9 + x^8 + 2x^7 + 4x^6 + 5x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 15x^2 - 4x + 17$$

(b) $f(x) := 2x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 5x - 2$

$$g(x) := x^4 - 7x^2 - 4x + 2$$

Aufgabe 7.5 (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen (i), (ii) und (iii) im Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ unter alleiniger Verwendung der Körperaxiome, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0$:

(i) $(-1) \cdot (-1) = 1$ (ii) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (iii) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, falls $c \neq 0$

(b) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen unter Verwendung der Anordnungsaxiome für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(i) $a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$ (ii) $a < b \Rightarrow -b < -a$

(c) Sei $y \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $4xy \leq 2x^2 + 2y^2$.