Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 9 - Abgabe bis Dienstag, 18.06.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 9.1 (5 Punkte)
Es seien a und b zwei linear unabhänigige Vektoren eine beliebigen Vektorraumes V.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $a+b$ und $a-b$ ebenfalls linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $a, a+b$ und $a-b$ linear abhängig sind.

Aufgabe 9.2 (3 Punkte)
Weisen Sie nach, dass $B := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis ist. Berechnen Sie außerdem die Koordinaten von $u = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B.

Aufgabe 9.3 (19 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuchen Sie, ob u_1, u_2, u_3 sowie w_1, w_2, w_3 jeweils linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie jeweils zwei alternative Basen der Unterräume $U := \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3)$ und $W := \operatorname{span}(w_1, w_2, w_3)$ des $\mathbb{R}^4$, indem Sie aus den Erzeugern von U und W jeweils eine Basis *auswählen* bzw. eine Basis *berechnen*.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U+W$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

(d) Geben Sie die Dimensionen von $U, W, U+W$ und $U \cap W$ an.

(e) Ergänzen Sie jeweils *eine* der in (b) bestimmten Basen von U bzw. W zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 9.4 (5 Punkte)
Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definiert durch $f(g) := g'$ (erste Ableitung des Polynoms g)

(b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + (1,0,1,0)^T$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x \end{pmatrix}$

(d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definiert durch $f(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

(e) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = (2, x_4, x_1, 3)^T$