Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 10 - Abgabe bis Dienstag, 25.06.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 10.1 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die zur linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gehörige Abbildungsmatrix, wenn f die kanonische Basis $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gemäß $f(e_1) := e_3 - e_1$, $f(e_2) := 2e_1 - 3e_2$ und $f(e_3) := 3e_2 + 4e_3$ abbildet. Geben Sie das Bild $f(u)$ des Vektors $u = (1, 2, 3)^T$ an, und bestimmen Sie den Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der auf $f(v) = (5, 3, -1)^T$ abgebildet wird. Ist der Vektor v eindeutig bestimmt?

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix sowie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \qquad \text{mit} \qquad f(g) := g \cdot x + g(2) \cdot x^4$$

bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ und $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$. Geben Sie außerdem die notwendigen Rechenschritte an, mit denen das Polynom $p(x) := 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ durch die Abbildung f mit Hilfe der Abbildungsmatrix ausgewertet wird. (Hinweis: Dabei bezeichnet $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ den Vektorraum aller Polynome vom Höchstgrad $n = 3, 4$.)

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)
Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $f(a), f(b) \in W$ seien linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch $a, b \in V$ linear unabhängig sind. Gilt auch die Umkehrung der Aussage (Beweis oder Gegenbeispiel)?

Aufgabe 10.4 (10 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$, $A \cdot d$, $B \cdot e$, $B^T \cdot d$, $B^T \cdot A^T$, $B \cdot d$, $c \cdot d$, $d \cdot c$, $c \cdot B$ und $d^T \cdot B$, falls diese existieren.

Aufgabe 10.5 (6 Punkte)
Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ im Körper K, wobei die Fälle

(a) $K = \mathbb{R}$,

(b) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und

(c) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

zu unterscheiden sind.