

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 11 - Abgabe bis Dienstag, 02.07.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 11.1 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, durch die die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(\mathbf{a}_i) := \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ eindeutig bestimmt wird, wobei

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie außerdem je eines Basis des Kerns und des Bildes von f , und geben Sie die Dimension des Bildraumes und des Kerns an.

Aufgabe 11.2 (5 Punkte)

In Aufgabe Ü9.1 (vgl. Übungsstunde 12. bis 14.06.2013) wurde aus den vorgegebenen Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ eine Basis von $U = \text{span}(a, b, c, d)$ ausgewählt. Dazu wurde das lineare Gleichungssystem $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0$ in ein äquivalentes System $\lambda_1 a' + \lambda_2 b' + \lambda_3 c' + \lambda_4 d' = 0$ überführt, wobei die Gleichungssysteme in Kurzschreibweise durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ 0 & 0 & c'_2 & d'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ausgedrückt wurden. Durch Untersuchung der Lösungsmenge von $\lambda_1 a' + \lambda_2 b' + \lambda_3 c' + \lambda_4 d' = 0$ wurde der Schluss gezogen, dass $B = \{a, c\}$ eine Basis von U ist.

- Kann man in Aufgabe Ü9.1 auch $B' = \{b, d\}$ als Basis von U wählen? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Die Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ seien jetzt so gewählt, dass *mindestens einer* der vier Vektoren von denen in Aufgabe Ü9.1 verschieden ist, und das Gleichungssystem $\lambda_1 a' + \lambda_2 b' + \lambda_3 c' + \lambda_4 d' = 0$ habe weiterhin die Gestalt gemäß (1), wobei $a'_1 \neq 0$ und $c'_2 \neq 0$ gelte. Ergibt sich dann aus der Lösungsmenge von $\lambda_1 a' + \lambda_2 b' + \lambda_3 c' + \lambda_4 d' = 0$ *immer*, dass sowohl $B = \{a, c\}$ als auch $B' = \{b, d\}$ Basen von $U = \text{span}(a, b, c, d)$ sind? Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel)!

Aufgabe 11.3 (3 Punkte)

In Aufgabe Ü10.2.(b) wurde gezeigt, dass $B_{\text{im}(f)} = \{(1, 1, 0)^T, (1, 3, 1)^T\}$ eine Basis des Bildes $\text{im}(f)$ der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, x_2 + x_3 + x_4)^T.$$

ist. Geben Sie für die Abbildung f einen Teilraum U von $\mathbb{R}^4$ an, der durch f bijektiv auf $\text{im}(f)$ abgebildet wird. Weisen Sie insbesondere die Bijektivität der so entstehenden linearen Abbildung $g: U \rightarrow \text{im}(f)$ nach.

(Aufgaben 11.4 und 11.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 11.4 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = A \cdot x$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis $B_{\mathbb{R}^3} = \{u, v_1, v_2\}$ des $\mathbb{R}^3$ und eine Basis $B_{\mathbb{R}^2} = \{w_1, w_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, so dass gilt:

$$\ker(f) = \text{span}(v_1, v_2) \quad , \quad \text{im}(f) = \text{span}(w_1) \quad \text{und} \quad f(u) = w_1 \quad .$$

Aufgabe 11.5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5} \quad .$$

Bestimmen Sie außerdem eine Basis des Zeilenraumes und eine Basis des Spaltenraumes der Matrix A .