Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 12 - Abgabe bis Dienstag, 09.07.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 12.1 (5 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum V mit der Basis $B_V = \{(1,-2,1)^T\ ,\ (-3,1,-2)^T\}$, sowie der Vektorraum W mit der Basis $B_W = \{(1,0,1)^T\ ,\ (0,1,0)^T\ ,\ (1,1,0)^T\}$. Die lineare Abbildung $f : V \to W$ sei definiert durch

$$f\big((x_1,x_2,x_3)^T\big) \ := \ \big(x_1+x_2-x_3\ ,\ x_1+2x_2+3x_3\ ,\ x_2-x_1\big)^T\ .$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix A der linearen Abbildung f. Geben Sie die notwendigen Rechenschritte an, um mittels A den Wert $f(x)$ für $x = (-1,-53,10)^T \in V$ auszurechnen. Ist die Abbildung injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

Aufgabe 12.2 (7 Punkte)

Untersuchen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (in $\mathbb{R}$), ob die folgenden beiden Gleichungssysteme lösbar sind. Geben Sie im Fall der Lösbarkeit die Lösungsmenge an.

(a)

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_4 &= 1\\ x_1+x_2+4 &= 0\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4 &= 1\\ x_4 &= 1+x_1+2x_3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 5x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5 &= 1\\ -x_1+x_2+x_3-x_4-x_5+x_6 &= 0\\ 3x_1+3x_2+4x_3+x_4+2x_5+2x_6 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 & 0\\ 3 & 4 & 5 & 9 & 1\\ 6 & 7 & 8 & 9 & 2\\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

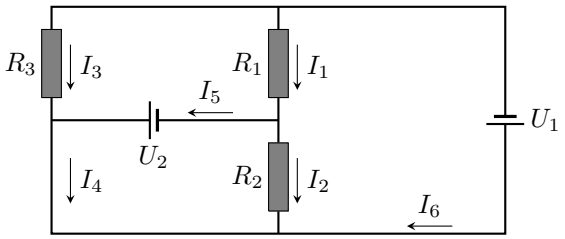
(Aufgaben 12.4 und 12.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 12.4 (5 Punkte)

Die Spannung U in einem Stromkreis ist gleich dem Produkt aus der Stomstärke I und dem Widerstand R. Ferner gelten die Kirchhoffschen Regeln:

- Knotenregel: In einem Knotenpunkt ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme. Dies bedeutet, dass die Summe der Teilströme in jedem Knoten gleich Null ist.
- Maschenregel: In einem geschlossenen Stromkreis ist die Summe der angelegten Spannungen gleich der Summe der Spannungsabfälle. Dies bedeutet, dass die Summe der Teilspannungen in jeder Masche gleich Null ist.

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für den nachfolgend skizzierten Stromkreis auf, wobei die Vorzeichen der Ströme $I_1, \ldots, I_6$ entsprechend der Pfeilrichtungen festgelegt sind. Berechnen Sie die Ströme $I_1, \ldots, I_6$ für $U_1 = 2V$, $U_2 = 1V$, $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$ und $R_3 = 2\ \Omega$.



Aufgabe 12.5 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zur folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Interpretieren Sie die Einträge der Matrix dabei als Elemente aus dem Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.